
Stanford University Libraries
3 6105 000 993 522

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

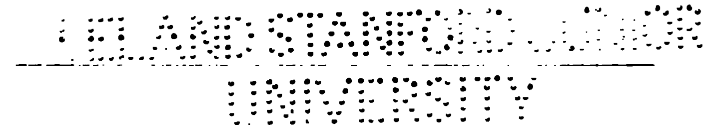
L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.



Einundneunzigster Band.

In vier Heften.

Mit einer Figurentafel.

Berlin, 1881.

Druck und Verlag von G. Reimer.

Inhaltsverzeichniss des einundneunzigsten Bandes.

Das Strahlensystem dritter Ordnung und zweiter Classe.

(Hierzu Taf. I Fig. 1.)

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

In der vorliegenden Abhandlung gebe ich eine einfache Construction eines der von Herrn **Kummer** *) aufgestellten Strahlensysteme zweiter Classe. Es wird dabei die Beziehung, welche die eine gemeinsame Brennfläche berührenden Strahlensysteme dritter Ordnung zweiter Classe unter einander haben, deutlich erkannt und die Construction der Punkte und Ebenen der Brennfläche ermöglicht werden. Die Herleitung des Strahlensystems, welche Herr **Reye** **) gegeben, der zuerst der Geometrie der Lage diese Gebilde zugänglich gemacht hat, wird sich naturgemäss anschliessen, und die von ihm aufgestellten Sätze werden wichtige Ergänzungen erhalten. Zum Schlusse mache ich aufmerksam auf ein specielles System, das in der Polarentheorie der Complexe zweiten Grades von Bedeutung ist.

§. 1.

Construction des Strahlensystems.

In einer Ebene (01) seien zwei reciproke ebene Systeme (0) und (1) bekannt, so dass zu jeder Geraden l_0 ein Punkt L_1 gehört und umgekehrt; wir werden hierbei stets die Elemente des einen Systems mit dem unteren Index (0), die des anderen mit dem unteren Index (1) behaften. Es seien ferner gegeben zwei Strahlenbüschel erster Ordnung A und B in den Ebenen α und β, welche einen gemeinschaftlichen Strahl besitzen, so dass also die Verbindungslinie der Mittelpunkte übereinstimmt mit der Schnittgeraden ihrer Ebenen.

Zu jeder Geraden l_0 der Ebene* (01) *construiren wir nun einen ihr zu-

---

*) *Kummer,* über die algebr. Strahlensysteme. (Abh. d. Berl. Akad. 1866.)

**) *Reye,* über Strahlensysteme zweiter Classe und die *Kummer*sche Fläche vierter Ordnung. (Dieses Journal Bd. 86, S. 84.)

gehörenden Strahl $l^{(0)}$ durch den Punkt L_1 der Art, dass er dieselben Strahlen der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ schneidet wie die Gerade l_0. Die Gesammtheit aller Strahlen $l^{(0)}$ bildet ein Strahlensystem Σ_0, welches wir der Betrachtung unterwerfen.

Das Strahlensystem Σ_0 ist von der dritten Ordnung.

Beweis: Durch einen beliebigen Punkt G des Raumes ziehen wir zu jeder Geraden l_0 einen entsprechenden Strahl, der dieselben Strahlen der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ schneidet, wie l_0. Es ist dann das ebene System (0) projectivisch auf den Strahlenbündel G bezogen; denn beschreibt l_0 einen Strahlenbüschel, so werden dadurch die Büschel A und B projectivisch auf einander bezogen, so dass sie ihren gemeinsamen Strahl entsprechend gemein haben. Diese Büschel werden von G aus durch zwei in perspectivischer Lage befindliche Ebenenbüschel projicirt, deren Schnitt ein ebener Strahlenbüschel ist, welcher dem Büschel, den l_0 beschreibt, entspricht. Zu der Geraden l_0 ziehen wir weiter durch G einen zweiten entsprechenden Strahl nach L_1 und erhalten hierdurch einen zweiten zu dem System (0) projectivischen Bündel in G. Die beiden Bündel mit dem gemeinsamen Mittelpunkt G sind durch Vermittelung der Graden l_0 collinear verwandt und haben desshalb höchstens drei Strahlen entsprechend gemein, welche dem System Σ_0 angehören.

Das Strahlensystem Σ_0 ist von der zweiten Classe.

Beweis: Eine beliebige Ebene γ schneidet (01) in einer Geraden h_1, welche von den der Ebene γ angehörenden Strahlen von Σ_0 geschnitten wird. Alle die Linie h_1 treffenden Strahlen von Σ_0 haben in dem ebenen System (0) entsprechende Linien, die durch den Punkt H_0 gehen und eine projectivische Beziehung der Büschel A und B hervorrufen. Es ist bekannt, dass alle Linien des Raumes, welche je zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel schneiden, einem Nullsysteme angehören, welches für h_1 eine durch H_0 gehende zugehörige Gerade liefert. Die Ebene γ schneidet diese Gerade in einem Punkte U, der als Mittelpunkt eines in γ liegenden Büschels die Büschel A und B in derselben Weise projectivisch auf einander bezieht, wie dies durch den Büschel H_0 geschehen war. Der Punkt U ist aber Mittelpunkt eines zweiten in γ liegenden Büschels, der zum ersten projectivisch ist, wenn wir zu jeder Linie l_0 durch H_0 die Gerade durch U ziehen, welche nach dem Punkte L_1 auf h_1 geht. Die beiden Strahlen, welche die Büschel U entsprechend gemein haben, gehören dem System Σ_0 an.

Man erkennt leicht noch Folgendes: Wird γ um die Gerade h_1 gedreht, so liefern die Durchschnitte der in γ liegenden Strahlen von Σ_0 mit h_1 eine involutorische Punktreihe, welche projectivisch ist zu der Punktreihe, welche U beschreibt. Es bilden desshalb alle eine Gerade h_1 treffenden Strahlen von Σ_0 eine Regelfläche dritter Ordnung, für welche h_1 die einfache Leitgerade, der Ort der Punkte U aber die Doppelgerade ist. Die Strahlen der Regelfläche entsprechen in (01) den durch H_0 gehenden Linien projectivisch.

§. 2.

Die singulären Punkte und Ebenen von Σ_0.

Singuläre Ebenen des Strahlensystems sind solche, in welchen mehr als zwei Strahlen liegen und in welchen sich alsdann, wie sich ergeben wird, entweder ein Büschel erster oder zweiter Ordnung von Σ_0 befindet.

Singuläre Punkte sind solche, durch welche mehr als drei Strahlen gehen und die dann einen Büschel erster Ordnung von Σ_0 enthalten.

In der Ebene (01) ist der Ort aller Punkte, durch welche die in der reciproken Beziehung*) ihnen entsprechenden Geraden gehen, bekanntlich ein Kegelschnitt ϱ und der Ort aller Geraden, welche die ihnen entsprechenden Punkte enthalten, ein Büschel zweiter Ordnung, dessen Kegelschnitt σ die Curve ϱ in zwei Punkten berührt. Man sieht leicht ein, dass alle Tangenten von σ dem System Σ_0 angehören, d. h. die Ebene (01) ist eine singuläre Ebene von Σ_0 (s. Taf. I. Figur 1).

Ausser (01) erhalten wir noch vier singuläre Ebenen mit Büscheln der zweiten Ordnung.

Die Ebene α des Büschels A möge (01) schneiden in der Geraden a, die Ebene β des Büschels B in b.

b schneide den Kegelschnitt ϱ in den Punkten M und N, a denselben Kegelschnitt in O und P. Diesen vier Punkten sowie ihren sechs Verbindungsgeraden und den drei Diagonalpunkten werden wir je nach Bedürfniss den unteren Index 0 oder 1 ertheilen, ohne damit andere Elemente von (01) bezeichnen zu wollen.

Zu den vier Punkten gehören in den reciproken Beziehungen die Tangenten von σ, welche durch die Punkte gezogen und demgemäss be-

---

*) *Reye*, (Geometrie der Lage, Bd. 2) und *Schröter* (dieses Journal, Bd. 77 S. 105).

zeichnet werden. Wir betrachten die Geraden des Büschels O_0 in (0) und suchen die Strahlen von Σ_0, welche ihnen zugehören. Sie alle werden nach §. 1 die Linie OA und o_1 treffen und desshalb in der Ebene (o_1A) liegen. Der Strahlenbüschel O_0 liefert auf b eine zu ihm perspectivische Punktreihe und diese wird durch Vermittelung des Büschels $(B\beta)$ übertragen auf die Schnittgerade der Ebenen β und (o_1A). Der Strahlenbüschel O_0 liefert aber auch auf der Geraden o_1 eine zu ihm projectivische Punktreihe, wenn jedem Strahle von O_0 der in der reciproken Beziehung ihm entsprechende Punkt zugewiesen wird. Es ist desshalb die Punktreihe o_1 auch projectivisch zu der Punktreihe auf der Schnittgeraden von β und (o_1A), und die Verbindungslinien entsprechender Punkte ergeben einen Strahlenbüschel der zweiten Ordnung, welcher zu Σ_0 gehört. Ebenso zeigt man, dass die Ebenen (p_1A), (n_1B) und (m_1B) Büschel der zweiten Ordnung von Σ_0 enthalten.

Je zwei dieser fünf Büschel haben einen gemeinsamen Strahl.

Büschel erster Ordnung von Σ_0 finden wir in folgender Weise. Der Strahl p_0 hat in Σ_0 unendlich viele ihm zugehörende Strahlen. Alle durch P_1 gehenden, in der Ebene (p_0B) liegenden Strahlen gehören zu dem Strahle p_0, denn sie gehen sämmtlich durch den zu p_0 in der reciproken Beziehung gehörigen Punkt P_1 und schneiden die nämlichen Geraden der Büschel A und B, welche von p_0 getroffen werden.

So erhält man vier Büschel der ersten Ordnung von Σ_0 in den Ebenen (p_0B), (o_0B), (m_0A) und (n_0A) mit den Mittelpunkten P, O, M und N.

Sechs andere Büschel erster Ordnung haben ihre Mittelpunkte ausserhalb der Ebene (01). Alle die Gerade a_1 treffenden Strahlen von Σ_0 haben in (0) zugehörige Linien, die durch A_0, den Schnittpunkt von o_0 und p_0, gehen. Man erkennt leicht, dass die in Rede stehenden Strahlen von Σ_0 sämmtlich in der Ebene α liegen und durch den Punkt B gehen. Die Büschel $(B\alpha)$ und $(A\beta)$ gehören desshalb zu Σ_0.

Wir betrachten ferner den Büschel C_0 in (0), wenn C_0 der Schnittpunkt der Geraden m_0 und o_0 ist. Alle diesem Büschel zugehörenden Strahlen von Σ_0 treffen die Gerade MO oder c_1. Der Büschel C_0 bestimmt zwischen den Büscheln $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ eine projectivische Verwandtschaft der Art, dass alle Geraden des Raumes, die irgend zwei entsprechende Geraden von A und B schneiden, einem Nullsysteme angehören. Der im Nullsysteme zu c_1 gehörige Strahl geht durch C_0 und schneidet die Linien

BO und AM; zu der Ebene $(m_0 A)$ gehört der Punkt M, zu $(o_0 B)$ der Punkt O; $(m_0 A)$ und $(o_0 B)$ schneiden sich daher in der Geraden, welcher c_1 im Nullsysteme entspricht. Ziehen wir nun noch die Linien $\overline{C_0 S_0}$ oder g_0 und bestimmen auf c_1 den zu g_0 in der reciproken Beziehung gehörigen Punkt G_1, welcher auf s_1 liegt, so muss der durch G_1 gehende Strahl von Σ_0 in der Ebene $(G_1 AB)$ liegen. Diese Ebene bringen wir zum Schnitt mit $(m_0 A)$ und $(n_0 B)$ in dem Punkte D, so müssen durch diesen Punkt alle die Gerade c_1 treffenden Strahlen von Σ_0 gehen.

In der That, der Büschel (Dc_1) und C_0 in (01) liefern zwischen den Büscheln $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ dieselbe projectivische Beziehung, weil die beiden ersten dem in Rede stehenden Nullsysteme angehören. Durch Vermittelung des Büschels $(A\alpha)$ oder auch $(B\beta)$ sind ferner die Büschel (Dc_1) und C_0 projectivisch, und es schneidet (Dc_1) auf c_1 die zu dem Büschel C_0 projectivische Punktreihe aus, wie sie in der reciproken Beziehung in (01) verlangt wird, denn den drei Punkten M_1 G_1 O_1 entsprechen die Geraden m_0 g_0 und o_0. Der Σ_0 angehörende Strahlenbüschel D hat mit dem Büschel zweiter Ordnung der Ebene $(p_1 A)$ einen Strahl gemein, welcher durch den Schnittpunkt von c_1 mit p_1 geht. Die Ebene $(p_1 A)$ enthält demnach den Punkt D und die Verbindungsgerade der Punkte A und D geht durch den Schnittpunkt von m_0 mit p_1, welcher mithin auch auf der Geraden $\overline{S_0 G_1}$, dem Schnitte von (01) mit der Ebene $(G_1 AB)$, liegen muss. Ebenso erkennt man, dass die Verbindungslinie B mit D durch den Punkt $(n_1 o_0)$ geht und dieser Punkt sich ebenfalls auf der Geraden $\overline{S_0 G_1}$ befindet. Das heisst aber, die drei Punkte S_0, $(n_1 o_0)$ und $(m_0 p_1)$ liegen auf einer Geraden.

Man findet analog der eben gegebenen Entwickelung: Alle die Gerade $\overline{PN}$ oder d_1 treffenden Strahlen von Σ_0 bilden einen Büschel (Cd_1) erster Ordnung, dessen Mittelpunkt gefunden wird als Schnitt zweier Geraden, von welchen die erste den Punkt A verbindet mit dem Punkte $(n_0 o_1)$ und die zweite den Punkt B mit $(p_0 m_1)$; es liegen die drei Punkte S, $(n_0 o_1)$ und $(p_0 m_1)$ auf einer Geraden. Der durch den Schnittpunkt von c_1 und d_1 oder R_1 gehende Strahl von Σ_0 ist die Verbindungsgerade der Punkte C und D und gleichzeitig die Schnittgerade der bezüglichen singulären Ebenen. Schliesslich findet man noch zwei Büschel erster Ordnung von Σ_0 in allen $\overline{PM}$ oder e_1 und $\overline{ON}$ oder f_1 treffenden Strahlen von Σ_0. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte F und E fällt zusammen mit der Schnittgeraden

der Ebenen und ist der durch den Diagonalpunkt *T* gehende Strahl von Σ_0. Wir haben somit zehn singuläre Ebenen mit Strahlenbüscheln der ersten Ordnung erhalten und finden mit den fünf Ebenen, welche Büschel zweiter Ordnung liefern, im Ganzen fünfzehn singuläre Ebenen und zehn singuläre Punkte. Man kann sich direct überzeugen, dass keine weiteren singulären Punkte und Ebenen existiren, doch wird sich dies später durch eine eigenartige Gruppirung der Strahlen von Σ_0 ergeben. Wir dürfen desshalb den directen Beweis unterdrücken.

Die Anordnung der singulären Punkte und Ebenen im Raume wollen wir nun näher betrachten. Es ist zweckmässig dieselben in einer besonderen Weise zu bezeichnen. In der folgenden Tabelle sind die Ebenen zunächst wie früher bezeichnet, und ist jedesmal dabei eine Combination der Zahlen 0, 1, 2, ... 5 zu zweien gesetzt, welche die Uebersicht erleichtert.

Ebenen mit Büschel zweiter Ordnung.

		(01)	mit den Punkten	*MNOP*
$(m_1 B)$	oder	(02)	- - -	*MCBE*
$(n_1 B)$	-	(03)	- - -	*NDBF*
$(o_1 A)$	-	(04)	- - -	*OCAF*
$(p_1 A)$	-	(05)	- - -	*PDAE*

Ebenen mit Büschel erster Ordnung.

$(m_0 A)$	od.	(12)	m. d. Punkten	*MDAF*	u. Mittelpunkt d. Büschels	*M*	od.	(345), (012)
$(n_0 A)$	-	(13)	- - -	*MCAE*	- - - -	*N*	-	(245), (013)
$(o_0 B)$	-	(14)	- - -	*ODBE*	- - - -	*O*	-	(235), (014)
$(p_0 B)$	-	(15)	- - -	*PCBF*	- - - -	*P*	-	(234), (015)
(bA)	-	(45)	- - -	*MNAB*	- - - -	*A*	-	(123), (045)
(aB)	-	(23)	- - -	*OPAB*	- - - -	*B*	-	(145), (023)
(cD)	-	(35)	- - -	*MOCD*	- - - -	*D*	-	(124), (035)
(dC)	-	(24)	- - -	*NPCD*	- - - -	*C*	-	(135), (024)
(eF)	-	(34)	- - -	*MPEF*	- - - -	*F*	-	(125), (034)
(fE)	-	(25)	- - -	*NOEF*	- - - -	*E*	-	(134), (025).

Jede Ebene ist durch eine Combination zu zwei Elementen ohne Wiederholung aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, bezeichnet*). Jeder Punkt kann auf zweifache Weise bezeichnet werden, durch eine Combination dieser Ziffern zu dreien oder durch die Combination der drei übrigen. *Auf einer*

*) Die Bezeichnungen gehen in die des Herrn *Reye* über, wenn allenthalben die Ziffer Null weggelöscht wird und die Bezeichnungen der letzten zehn Ebenen mit denen der nebenstehenden Punkte vertauscht werden.

Ebene liegen die vier Punkte, in deren Bezeichnungen diejenige der Ebene entweder ganz oder gar nicht enthalten ist. Durch einen Punkt gehen die sechs Ebenen, deren Bezeichnungen in derjenigen des Punktes ganz oder gar nicht zu finden ist. Die Verbindungslinie zweier Punkte ist stets die Schnittgerade derjenigen Ebenen, deren Bezeichnungen in denjenigen der Punkte gleichzeitig sich befinden. Die Schnittgerade zweier Ebenen ist nur dann die Verbindungslinie zweier Punkte, wenn die Bezeichnungen der ersteren keine gleichen Elemente besitzen. Ebenen, deren Bezeichnungen gleiche Elemente enthalten, haben nur einen singulären Punkt gemein. Eine Ebene wird von den sechs Ebenen, welche je zwei singuläre Punkte mit ihr gemein haben, in den sechs Seiten eines vollständigen Viereckes geschnitten, von den übrigen acht Ebenen in acht Geraden, die zu je zweien durch die der Ebene angehörigen singulären Punkte gehen und einen Kegelschnitt umhüllen. Letzteres ist zunächst nur bewiesen für die Ebene (01); es wird sich aber im Folgenden für jede singuläre Ebene dasselbe ergeben. *Durch die Bezeichnung einer Ebene sind die nicht in ihr liegenden sechs Punkte paarweise geordnet in der Art, dass die Bezeichnung des einen Punktes des Paares in die des andern übergeht durch Vertauschung der die Ebenen bestimmenden Elemente. Die Verbindungslinie der drei Paare treffen die Ebene in den Diagonalpunkten des durch die vier Punkte der Ebene bestimmten vollständigen Viereckes. Je zwei der Punkte können ein solches Paar bilden und die zugehörige Ebene ist dadurch festgelegt.*

Betrachten wir näher die sechs durch den singulären Punkt D gehenden Ebenen; sie liefern auf (01) die Schnittgeraden: $m_0 p_1 d_1 n_1 o_0 c_1$, welche ein *Brianchon*sches Sechsseit bilden, denn wir haben oben gezeigt, dass in der hier gegebenen Anordnung die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch den Punkt S gehen. Analoges könnte man beweisen für die anderen nicht der Ebene (01) angehörenden Punkte; es wird sich aber im Folgenden ergeben, *dass die sechs durch jeden singulären Punkt gehenden singulären Ebenen einen Kegel der zweiten Ordnung umhüllen.*

Das Strahlensystem Σ_0 hat nur in solchen Ebenen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welche in ihren Bezeichnungen die Ziffer Null haben; alle übrigen Ebenen enthalten Büschel erster Ordnung von Σ_0, deren Mittelpunkte Bezeichnungen tragen, die zusammengesetzt sind aus Null und den Bezeichnungen der Ebenen.

§. 3.
Das Strahlensystem Σ_1.

In §. 1 wurde erörtert, dass alle eine Gerade h_1 von (01) treffenden Strahlen von Σ_0 eine Regelfläche dritter Ordnung liefern, deren Doppelgerade durch den Punkt H_0 geht und diejenigen Strahlen der Büschel $(A\beta)$ und $(B\alpha)$ schneidet, welche auch von h_1 getroffen werden. Man erkennt desshalb, dass alle diese Doppelgeraden ebenfalls ein Strahlensystem Σ_1 bilden, welches in analoger Weise wie Σ_0 construirt wird und auf die Geraden des ebenen Systems (1.) bezogen ist. Σ_1 besitzt dieselben singulären Punkte und Ebenen wie Σ_0, nur sind die Punkte als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln des Systems den Ebenen in anderer Art zugeordnet.

Man überzeugt sich, dass alle Ebenen, deren Bezeichnungen die Ziffer 1 tragen, Büschel zweiter Ordnung für Σ_1 liefern, während die übrigen zehn Ebenen Büschel erster Ordnung enthalten mit Mittelpunkten, deren Bezeichnungen zusammengesetzt sind aus 1 und den Ziffern, welche die betreffende Ebene bezeichnen.

Alle Strahlen von Σ_1, die eine Gerade von (01) treffen, liegen auf einer Regelfläche dritter Ordnung, deren einfache Leitlinie diese Gerade ist, deren Doppellinie aber zu Σ_0 gehört und der ersteren entspricht. Ein Strahl $l^{(0)}$ von Σ_0 schneidet alle Strahlen von Σ_1, welche in der zu $l^{(0)}$ gehörigen Graden der Ebene (01) eintreffen. Man kann desshalb bei der ursprünglichen Construction von Σ_0 an Stelle der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ irgend zwei andere Büschel setzen, welche zu Σ_1 gehören und deren Mittelpunkte nicht in (01) liegen. Wir werden später von einer solchen Construction Gebrauch machen.

Die Strahlen von Σ_0 und diejenigen von Σ_1 stehen in enger Beziehung zu einander, sie umhüllen dieselbe Brennfläche. Um dies zu zeigen, beweisen wir, dass die Strahlen von Σ_0 in ein System von Regelschaaren zweiter Ordnung sich zusammenfassen lassen, deren Leitschaaren das Strahlensystem Σ_1 bilden.

Wir betrachten zu diesem Zwecke folgende acht singuläre Ebenen:

(02)(03)(04)(05)

(12)(13)(14)(15).

Von diesen Ebenen gehen vier durch den Punkt (123) oder A; die vier andern durch (023) oder B; vier durch (135) oder C, die vier andern durch

(035) oder *D;* und schliesslich vier durch (125) oder *F,* die vier andern durch (025) oder *E.* Diese drei Punktenpaare bilden besondere Flächen der zweiten Classe, für welche die acht Ebenen Tangentialebenen sind. Die Ebenen sind desshalb acht associirte Ebenen und umhüllen eine doppelt unendliche Zahl von Flächen zweiter Classe. Aus diesen greifen wir in folgender Weise ein einfach unendliches System heraus. Wir verlangen, dass die Flächen durch einen der vier singulären Punkte von (01), etwa *M* gehen sollen, und wollen zeigen, dass die Flächen dann auch die drei anderen Punkte *NOP* enthalten müssen.

Durch *M* oder (012) ziehen wir in der Ebene (12) eine beliebige Gerade $l^{(0)}$, welche der zu bestimmenden Fläche $G_{(01)}$ angehören soll, wodurch letztere bestimmt ist. $l^{(0)}$ trifft die drei Ebenen (03), (04), (05) in drei Punkten, welche der Reihe nach auf den Geraden $\overline{DF}$, $\overline{FA}$ und $\overline{AD}$ liegen, und welche wir resp. mit den Punkten *N*, *O* und *P* verbinden. Diese drei Strahlen gehören dem Strahlensystem Σ_1 an und bestimmen als Leitlinien die Fläche $G_{(01)}$, welche auch die Gerade $l^{(0)}$ enthält. Die Gerade der Regelschaar von $G_{(01)}$, welche durch *P* geht, liegt in der Ebene (15). Wir bringen, um dies zu beweisen, die durch *N* und *O* gehenden Leitgeraden zum Schnitt mit (15) und verbinden die so erhaltenen Punkte durch eine Gerade, welche durch *P* gehen muss. In der That dreht sich $l^{(0)}$ um den Punkt *M* in (12), so erhalten wir zwei projectivische Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten *N* und *O* bezüglich in den Ebenen (03) und (04), von welchen je zwei entsprechende Strahlen Leitgerade einer $G_{(01)}$ sind. Die Büschel schneiden die Ebene (15) in projectivischen Punktreihen auf $\overline{BF}$ und $\overline{CF}$, welche ihren Schnittpunkt *F*, der auch in (12) liegt, entsprechend gemein haben, also in perspectivischer Lage sind. Das perspectivische Centrum ist aber *P;* denn ziehen wir einmal durch *M* die Gerade m_0, so erhalten wir in den Büscheln *N* und *O* die Strahlen n_1 und o_1, in der Ebene (15) aber den Strahl p_0, welcher durch *P* geht. Das zweite Mal ziehen wir durch *M* die Gerade $\overline{MA}$, welche für den Büschel *O* die Gerade $\overline{OA}$ liefert. $\overline{MA}$ trifft ferner die Ebene (03) in dem Schnittpunkte der Geraden $\overline{DF}$ und $\overline{NB}$ und liefert desshalb in dem Büschel *B* die Gerade $\overline{NB}$. $\overline{NB}$ aber trifft die Ebene (15) in dem Punkte *B;* $\overline{OA}$ dieselbe Ebene in dem Schnittpunkte von $\overline{CF}$ mit $\overline{PB}$ und die Verbindungsgerade dieser Punkte geht durch *P.* Die Ebene (15) schneidet desshalb die Regelfläche

$G_{(01)}$ in einer durch P gehenden Geraden und ist somit Tangentialebene derselben. Ebenso zeigt man, dass die übrigen der genannten acht singulären Ebenen die Fläche $G_{(01)}$ berühren und die Fläche die vier Punkte $MNOP$ enthält.

Wird der durch M gehende Strahl der Regelfläche $G_{(01)}$ um diesen Punkt in der Ebene (12) gedreht, so erhält man durch die obige Construction ein System von Flächen der zweiten Ordnung. Irgend eine derselben greifen wir heraus und bemerken, dass die durch M, N, O, P resp. in den Ebenen (12), (13), (14), (15) liegenden Geraden derselben Regelschaar angehören und zugleich dem Strahlensystem Σ_0. Wir beweisen, dass von $G_{(01)}$ die Geraden der Regelschaar zu Σ_0, dagegen die Geraden der Leitschaar zu Σ_1 gehören.

Der Strahlenbüschel $(A\alpha)$ bestimmt, da A nicht auf $G_{(01)}$ liegt, auf der Regelschaar eine Involution, welche durch diese auf die Schnittcurve λ von $G_{(01)}$ mit (01) übertragen wird. Das zu der Involution auf λ gehörige Involutionscentrum ist der Schnittpunkt von p_1 mit o_1 oder der Punkt A_1. Die Büschel $(A\alpha)$ und A_1 in (01) sind projectivisch zu einander, wenn wir diejenigen Strahlen derselben als entsprechende ansehen, welche dieselben Geraden der Regelschaar schneiden. Der Büschel $(A\alpha)$ ist ferner perspectivisch zur Geraden a_0, und damit ist auch letztere projectivisch auf den Büschel A_1 bezogen, und zwar erkennt man, dass den Strahlen $\overline{A_1P}$ und $\overline{A_1O}$ in a_0 die Punkte P_0 und O_0 zugeordnet sind. Ebenso liefert der Büschel $(B\beta)$ auf derselben Regelschaar eine zweite Involution, welche auf λ übertragen in dem Schnittpunkte von n_1 mit m_1 oder B_1 ihr Involutionscentrum hat. Der Büschel B_1 ist dann gerade so wie oben projectivisch zu der Punktreihe b_0 in der Art, dass den Strahlen m_1 und n_1 von B_1 die Punkte M_0 und N_0 entsprechen.

Zieht man den gemeinschaftlichen Strahl der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$, so trifft dieser (01) in S_0. Er liefert auf λ ein Punktenpaar, das beiden Involutionen angehört, dessen Verbindungslinie die Gerade $\overline{A_1B_1}$ oder s_1 ist; diese entspricht in den beiden Büscheln A_1 und B_1 dem Schnittpunkte von a_0 mit b_0. Man erkennt nun, dass die Büschel A_1 und B_1 auf a_0 und b_0 in der Weise projectivisch bezogen sind, wie es auch durch die reciproke Beziehung in (01) geschieht, und hat folgendes Resultat.

Ein Strahl $l^{(0)}$ der Regelschaar $G_{(01)}$ schneidet die Ebene (01) in einem Punkte L_1. Derselbe hat in der reciproken Beziehung als entsprechende

Gerade die Verbindungslinie der auf a_0 und b_0 befindlichen Punkte, welche durch diejenigen Strahlen der Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ ausgeschnitten werden, die auch l_0 treffen; d. h. jeder Strahl der Regelschaar ist ein Strahl von Σ_0. Ebenso schliesst man, dass jeder Strahl der Leitschaar von $G_{(01)}$ dem Strahlensysteme Σ_1 zugehört.

Wir haben somit die Strahlen von Σ_0 und Σ_1 in die Regelschaaren resp. Leitschaaren eines Systems von Flächen zweiten Grades gruppirt. Die Flächen gehen sämmtlich durch die vier Punkte MNO und P und haben acht gemeinsame Tangentialebenen. Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei Flächen und jede Ebene wird von zweien berührt. Das Flächensystem enthält die drei Ebenenpaare:

$$(45),\ (23)$$
$$(35),\ (24)$$
$$(34),\ (25)$$

und eine Doppelebene (12).

Die übrigen acht singulären Ebenen tangiren die Flächen. Die beiden Strahlensysteme Σ_0 und Σ_1 haben die Tangenten der Curve σ in (01) *und sonst noch die drei Strahlen $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ und $\overline{EF}$ gemeinsam.*

Man kommt mit Hülfe einer beliebigen der Flächen $G_{(01)}$ zu einer allgemeineren Construction von Σ_0, wenn die beiden Büschel $(A\alpha)$ und $(B\beta)$ durch die Leitgeraden der Fläche ersetzt werden; diese Construction ist aber nicht immer auf reellem Wege durchführbar.

§. 4.
Die vier Strahlensysteme Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5.

Wir legen durch den Punkt P in der Ebene (01) eine beliebige Gerade h_1 und betrachten alle Strahlen von Σ_0, welche in dieser Geraden eintreffen. Die zu diesen Strahlen gehörigen Geraden von (0) bilden einen Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt H_0 auf p_0 liegt und welcher die Linie a in einer zu h_1 perspectivischen Punktreihe schneidet, wenn die in der reciproken Beziehung von (01) einander entsprechenden Strahlen von H_0 und Punkte von h_1 der Beziehung zu Grunde gelegt werden. Die beiden Punktreihen projiciren wir von A aus durch projectivische Strahlenbüschel, deren entsprechende Elemente durch die Ebenen eines Büschels erster Ordnung verbunden werden, in welchen die gesuchten Strahlen von Σ_0 liegen. Den

Büschel H_0 bringen wir ferner zum Schnitt mit der Geraden d und erhalten auch hier eine zu h_1 perspectivische Punktreihe. Beide Punktreihen projiciren wir von D aus, und es ergiebt sich gleichfalls ein Ebenenbüschel erster Ordnung, welcher die Strahlen von Σ_0 projicirt und der projectivisch zu dem ersten Ebenenbüschel ist, wenn diejenigen Elemente einander zugewiesen werden, welche denselben Strahl von Σ_0 enthalten. Die beiden Ebenenbüschel erzeugen desshalb eine Regelfläche $G_{(05)}$ zweiter Ordnung, deren Regelschaar zu Σ_0 gehört; sie enthält die vier Punkte:

$$P, D, A, E \quad \text{oder} \quad (051), (052), (053), (054)$$

und wird von den acht Ebenen:

$$(01), (02), (03), (04)$$
$$(51), (52), (53), (54)$$

in Geraden geschnitten, also berührt.

$G_{(05)}$ schneidet die Ebene (01) in der durch P gezogenen Geraden und der Tangente, welche von H_0 an den Kegelschnitt σ gelegt werden kann.

Wird h_1 um P bewegt, so erhält man ein Flächensystem, das dieselben Eigenschaften besitzt, wie die Flächen $G_{(01)}$; es enthält die drei Ebenenpaare:

$$(23), (14)$$
$$(24), (31)$$
$$(21), (34)$$

und eine Doppelebene (05).

Die Leitstrahlen der Flächen $G_{(05)}$ liefern desshalb ein Strahlensystem Σ_5 dritter Ordnung und zweiter Classe, das mit Σ_0 dieselbe Brennfläche besitzt. Da von einem Punkte der Ebene (01) zwei Tangenten an σ gelegt werden können, so gehen durch ihn zwei Strahlen von Σ_5.

Die drei Ebenenpaare des Flächensystems $G_{(05)}$ liefern uns zugleich sechs Strahlenbüschel erster Ordnung von Σ_5, welche wir hier anführen wollen:

in	(23)	den Büschel	(235)	oder	O
-	(14)	- -	(145)	-	B
-	(24)	- -	(245)	-	N
-	(13)	- -	(135)	-	C
-	(12)	- -	(125)	-	F
-	(34)	- -	(345)	-	M.

Da alle $G_{(05)}$ durch die Punkte $PEDA$ gehen und von den Ebenen (01), (02), (03), (04) berührt werden, so enthält Σ_5 noch die Büschel erster Ordnung:

in (01)	den Büschel	(015)	oder	P
- (02)	- -	(025)	-	E
- (03)	- -	(035)	-	D
- (04)	- -	(045)	-	A.

Ganz in derselben Weise könnte man aus Σ_1 ein Strahlensystem Σ_5' erhalten, indem man die Regelschaar von Σ_1 betrachtet, welche die Ebene (01) in einer durch P gehenden Geraden schneidet. Die Leitschaar einer solchen Regelschaar wird einem System Σ_5' angehören. Wir wollen zeigen, dass Σ_5 und Σ_5' übereinstimmen.

Zieht man durch P in (01) irgend eine Gerade h, bringt dann dieselbe zum Schnitt mit den Linien b, c, f und verbindet diese Punkte bezüglich mit A, D, E, so erhält man drei Gerade, welche als Leitlinien eine Regelschaar $G_{(05)}$ bestimmen, die zu Σ_5 gehört. Zieht man ferner durch P irgend eine zweite Gerade l_1 und projicirt die Schnittpunkte derselben mit den Linien b, c, f von den Punkten B, C, F aus, so erhält man drei Gerade, die als Leitlinien eine Regelschaar $G_{(15)}$ bestimmen, welche zu Σ_5' gehört.

Die Strahlen, welche von A und B

- D - C
- E - F

gezogen wurden, kreuzen sich in drei Punkten, welche, wie wir beweisen werden, in einer Geraden liegen, die desshalb beiden Leitschaaren $G_{(05)}$ und $G_{(15')}$ und somit auch den Systemen Σ_5 und Σ_5' angehört. Es wäre dann der Nachweis erbracht, dass Σ_5 und Σ_5' identisch sind.

Irgend ein Strahl auf $G_{(05)}$, der zu Σ_5 gehört, schneidet die drei Ebenen (25), (35), (45) in drei Punkten, die wir bezüglich von F, C, B projiciren. Die so erhaltenen Strahlen treffen die Ebene (01) in drei Punkten, welche auf einer durch P gehenden Geraden liegen müssen. Wir haben nur nöthig, für drei Strahlen von $G_{(05)}$ den Nachweis dieser Behauptung zu führen. Der durch A gehende Strahl von $G_{(05)}$ liegt in der Ebene (04) und trifft desshalb die Ebenen (25) und (35) in Punkten, die resp. auf $\overline{OF}$ und $\overline{OC}$ liegen, und welche von F resp. C aus projicirt beide den Punkt O in (01)

liefern. Derselbe Strahl von $G_{(05)}$ trifft aber (45) in A, welcher Punkt von B aus projicirt den Punkt S in (01) giebt. Die Gerade $\overline{SO}$ geht aber durch P. Wenn man ferner noch die D und E enthaltenden Strahlen von $G_{(05)}$ betrachtet, so findet man ebenso zwei durch P gehende Strahlen, und unsere Behauptung, dass Σ_5 und Σ'_5 identisch sind, ist erwiesen.

Setzt man an Stelle von P irgend einen andern der singulären Punkte von (01), so erhält man noch drei andere Strahlensysteme, die mit Σ_0 und Σ_1 zu Flächen zweiter Ordnung gruppirt werden können.

Jedes dieser Systeme kann nach der einfachen Art in §. 1 construirt werden, und je zwei derselben stehen in der Beziehung zu einander, wie Σ_0 und Σ_1.

Wir betrachten das Flächensystem $G_{(05)}$ in Zusammenhang mit der Ebene (05), auf welcher es einen durch die vier Punkte P, A, D, E gehenden Curvenbüschel ausschneidet. Der Strahlenbüschel O in (23), welcher zu Σ_5 gehört, bestimmt auf einer Fläche $G_{(05)}$ eine Involution der Strahlen von Σ_0. Diese Regelschaar überträgt die Involution auf die Schnittcurven von (05) mit $G_{(05)}$. Das Involutionscentrum ist Mittelpunkt eines Büschels, der projectivisch ist zu der Punktreihe $\overline{PA}$, in welcher der Büschel O die Ebene (05) schneidet, wenn diejenigen Elemente der Gebilde einander zugewiesen werden, die sich durch dasselbe Paar der Regelschaar ergeben.

Auf derselben Fläche $G_{(05)}$ wird in analoger Weise durch den Büschel B in (14) eine zweite Involution erzeugt, die auf (05) übertragen einen zu der Punktreihe $\overline{DF}$ projectivischen Büschel liefert. Die beiden in (05) befindlichen Büschel haben einen gemeinsamen Strahl, welcher dem Schnittpunkte der Geraden $\overline{DF}$ und $\overline{PA}$ jedesmal entspricht. Die Büschel der Ebene (05) und ihre Beziehungen zu den Punktreihen ergeben sich durch jede Fläche $G_{(05)}$ in derselben Weise; denn der Schnittgeraden der Ebenen (05) und (01), welche dem ersten Büschel angehört, entspricht immer der Punkt P, weil (01) die Fläche $G_{(05)}$ berührt und desshalb die beiden $G_{(05)}$ angehörenden Strahlen von Σ_0, die von $\overline{OP}$ getroffen werden, in der Schnittgeraden einmünden. Ebenso folgt, dass den Punkten D, A, E jedesmal dieselben Geraden von (05) entsprechen.

In (05) sind nun zwei reciproke ebene Systeme bestimmt, wenn wir die Büschel zu dem einen, die ihnen projectivischen Punktreihen zu dem andern Systeme rechnen. Ferner haben wir zwei Strahlenbüschel O

in (23) und B in (14), welche einen gemeinsamen Strahl besitzen. Es geht aus der obigen Entwickelung hervor, dass das System Σ_0 unter Zuhülfenahme dieser Gebilde ebenso construirbar ist, wie es in §. 1 angegeben wurde, und dasselbe gilt für Σ_5.

Man könnte nun von der Ebene (05) ausgehend weiter zu neuen Strahlensystemen kommen, die aber, wie man leicht erkennt, übereinstimmen müssen mit $\Sigma_1 \Sigma_2 \Sigma_3 \Sigma_4$, denn die Ebene (05) ist Tangentialebene für alle Flächensysteme $G_{(01)} G_{(02)} G_{(03)} G_{(04)}$.

Wir sprechen nun die Resultate in folgenden Sätzen aus:

Die sechs Strahlensysteme $\Sigma_\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ *haben dieselbe Brennfläche, dieselben sechzehn singulären Ebenen und zehn singulären Punkte.*

Das System Σ_α *hat in allen Ebenen, in deren Bezeichnung* α *selbst auftritt, Strahlenbüschel zweiter Ordnung, in allen übrigen Büschel erster Ordnung, deren Mittelpunkte Bezeichnungen tragen, die aus* α *und der Bezeichnung der Ebene zusammengesetzt sind.*

Je zwei Systeme Σ_α *und* Σ_β *haben den Büschel zweiter Ordnung in der Ebene* $(\alpha\beta)$ *und ausserdem noch drei Strahlen mit einander gemein. Sie lassen sich zusammenfassen in ein System von Flächen zweiter Ordnung* $G_{(\alpha\beta)}$*, das drei Ebenenpaare enthält und zwar diejenigen sechs Ebenen, deren Bezeichnungen weder* α *noch* β *tragen.* $(\alpha\beta)$ *selbst ist die dem Flächensysteme angehörende Doppelebene. Das Flächensystem schneidet* $(\alpha\beta)$ *in einem Curvenbüschel, dessen Grundpunkte die vier in* $(\alpha\beta)$ *liegenden singulären Punkte sind. Die übrigen acht singulären Ebenen tangiren alle* $G_{(\alpha\beta)}$.

Durch jeden Punkt gehen 45 *solcher Flächen, und jede Ebene wird von* 30 *derselben berührt.*

Jedes der sechs Strahlensysteme lässt sich auf fünffache Weise durch eine Regelschaar zweiten Grades beschreiben.

Die in §. 1 *gegebene Construction für* Σ_0 *ist für jedes andere System in derselben Weise zulässig, und zwar können die reciproken ebenen Systeme in fünf verschiedenen Ebenen angenommen werden, nämlich in allen, welche einen Büschel zweiter Ordnung des Strahlensystems enthalten. Zwei solcher Ebenen sind durch das betreffende Strahlensystem eindeutig auf einander bezogen, und zwar ergiebt sich zwischen ihnen eine geometrische Verwandtschaft des zweiten Grades.*

§. 5.
Die Brennfläche der Strahlensysteme.

Die sechs Strahlensysteme lassen sich zu je zweien in Systeme von Regelflächen gruppiren. Es werden desshalb alle diese Systeme dieselbe Brennfläche umhüllen. Jede Regelfläche wird von einer unendlich benachbarten desselben Systems geschnitten in einer Raumcurve der vierten Ordnung, längs welcher die Berührung mit der Brennfläche stattfindet. Letztere hat die Eigenschaft, dass für jeden ihrer Punkte zwei der durch dieselben gehenden Strahlen jedes der Strahlensysteme zusammenfallen, und dass in jeder ihrer Tangentialebenen die beiden in ihr liegenden Strahlen sich vereinigen. Wir sind nun im Stande, die Tangentialebenen und die Punkte der Brennfläche zu construiren.

Man betrachte einen beliebigen Strahl $l^{(0)}$ von Σ_0; alle Strahlen von Σ_1, welche ihn schneiden, bilden zwei Regelflächen, eine zweiter Ordnung, die (01) in einem Kegelschnitt trifft, und eine dritter Ordnung, die (01) in einer Geraden schneidet. In jeder durch $l^{(0)}$ gelegten Ebene befinden sich zwei Strahlen von Σ_1, welche diesen verschiedenen Flächen angehören; eine Ausnahme bilden nur die beiden Ebenen, welche durch die Schnittpunkte des soeben bezeichneten Kegelschnitts mit der Geraden gehen. Jede dieser Ebenen hat die Eigenschaft, nur einen Strahl von Σ_1, aber auch nur einen von Σ_0 zu enthalten, wie man leicht einsieht, wenn man einer Ebene eine Drehung um einen Strahl von Σ_1 ertheilt. Eine solche Ebene besitzt desshalb, da an Stelle von Σ_1 jedes andere Strahlensystem treten kann, von jedem der Systeme nur einen Strahl. Aber diese sechs Strahlen gehen auch sämmtlich durch einen Punkt. Denn betrachtet man den Schnittpunkt zweier solcher Strahlen von Σ_0 und Σ_1, so ist er der Ebene in der Art zugeordnet, dass zwei der durch ihn gehenden Strahlen von Σ_0 sich in einem Strahle der Ebene vereinigen; dasselbe gilt für die beiden Strahlen von Σ_1, und da an Stelle des letzteren Systems wieder die übrigen treten können, auch für alle Systeme.

Der Punkt gehört der Brennfläche an, und die Ebene ist die zugehörige Tangentialebene. Die dreissig Flächen $G_{(\alpha\beta)}$, welche diese Ebene berühren, fallen zu je zweien zusammen und haben alle den nämlichen Berührungspunkt. Von den 45 Flächen $G_{(\alpha\beta)}$, welche durch den Punkt gehen, fallen 30 paarweise zusammen und haben dieselbe Berührungsebene.

Da durch den Strahl $l^{(0)}$ von Σ_0 zwei solcher Ebenen gehen, so ist $l^{(0)}$ und jeder Strahl irgend eines der Systeme Doppeltangente der Brennfläche und man schliesst, dass letztere von der vierten Classe ist.

Auf dem Strahle $l^{(0)}$ liegen nun noch zwei andere Punkte der Brennfläche. Man bemerke nämlich, dass $l^{(0)}$ die Doppelgerade einer Regelfläche dritter Ordnung ist, welche durch Strahlen von Σ_1 gebildet wird; durch jeden Punkt von $l^{(0)}$ gehen im allgemeinen zwei Strahlen dieser Regelfläche, die, von $l^{(0)}$ aus projicirt, die Paare eines involutorischen Ebenenbüschels liefern. Die Strahlen von Σ_1 in den Ordnungselementen dieser Involution sind je zwei zusammenfallende Strahlen für die Punkte von $l^{(0)}$, in denen sie eintreffen. Die Ebenen, welche diese Strahlen mit der einfachen Leitgeraden der Regelfläche verbinden, die also nicht durch $l^{(0)}$ gehen, sind die zugehörigen Tangentialebenen der Brennfläche; $l^{(0)}$ berührt also in diesen Punkten die Brennfläche nicht. *Da $l^{(0)}$ in zwei Punkten berührt und in zweien die Fläche schneidet, so schliesst man, dass die Brennfläche von der sechsten Ordnung ist.*

Alle vier auf $l^{(0)}$ liegenden Punkte sind nach §. 1 *mittelst Cirkels und Lineals construirbar.*

Wendet man die angegebene Construction auf die Strahlen in den singulären Ebenen an, so erkennt man, dass *jede derselben die Brennfläche in einer Curve zweiter Ordnung (der Einhüllenden der in der Ebene liegenden Strahlen der Systeme) schneidet und in einem anderen Kegelschnitte, der durch die singulären Punkte der Ebene geht, berührt.* Die beiden Curven bestimmen die reciproke Beziehung in der Ebene, welche wir zur Construction der Strahlensysteme verwenden können, der Art, dass die erste Curve der Ort aller Geraden ist, deren entsprechende Punkte auf ihnen liegen, und die zweite Curve der Ort dieser Punkte selbst ist; die beiden Kegelschnitte berühren einander in zwei Punkten.

Ferner findet man für jeden singulären Punkt unendlich viele Tangentialebenen, welche einen Kegel zweiter Ordnung umhüllen und zu welchen die sechs daselbst zusammenstossenden singulären Ebenen gehören. *Die singulären Punkte sind demnach Knotenpunkte der Brennfläche.*

Lässt man den Punkt L_1, in welchem $l^{(0)}$ die Ebene (01) trifft, auf einem Kegelschnitt des Büschels (M, N, O, P) sich bewegen, so beschreibt die zugehörige Gerade l_0 einen Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welcher vier Tangenten an den Kegelschnitt schickt, zu denen wieder vier Punkte L_1 gehören. Die durch diese Punkte gehenden Strahlen von Σ_0 haben jeder

vier unendlich nahe Punkte mit der Brennfläche gemein. Man findet den Ort aller solchen Punkte L_1 durch die Schnitte entsprechender Curven eines Büschels und einer zu ihm projectivischen Schaar von Curven zweiter Classe, welche vier gemeinsame Tangenten haben. Der Ort von L_1 ist eine Curve der sechsten Ordnung, welche in den vier Punkten M, N, O, P Doppelpunkte hat und ausserdem die sechs Verbindungslinien derselben noch einmal berührt. Die Curve scheidet die Punkte von (01) in zwei Bereiche; die in dem einen Bereich eintreffenden Strahlen von Σ_0 haben mit der Brennfläche reelle Berührungspunkte, die anderen conjugirt imaginäre.

§. 6.

Die *Reye*sche Construction*).

Wir betrachten zunächst eine Fläche $G_{(\alpha\beta)}$ und suchen die zu den Strahlen dieser Fläche gehörigen Linien in den Ebenen (0α) und (0β). Diese Ebenen schneiden einander in einer Geraden, welche durch den Punkt $(0\alpha\beta)$ geht, und diese wird von $G_{(\alpha\beta)}$ ausser in $(0\alpha\beta)$ noch in einem zweiten Punkte getroffen, durch welchen die in (0α) und (0β) liegenden zu der Regelschaar resp. Leitschaar gehörenden Geraden gehen, wie es in §. 4 auseinander gesetzt wurde.

Ein Strahl von Σ_α und einer von Σ_β, welche beide auf einer $G_{(\alpha\beta)}$ liegen, haben in (0α) und (0β) zugehörige Linien, die auf der Schnittgeraden dieser Ebenen zusammenstossen.

Einem der Strahlensysteme, hier Σ_0, ertheilen wir nun eine besondere Stellung und suchen zu den Strahlen der übrigen Systeme diejenigen Linien auf, welche ihnen in den Ebenen (0α) $(\alpha = 1, 2, 3, 4, 5)$ zugehören. In einer ganz beliebigen Ebene des Raumes liegen von den fünf Systemen zehn Strahlen. Σ_α und Σ_β liefern je zwei; es kann aber eine Linie von Σ_α nur mit *einer* von Σ_β auf einer Fläche $G_{(\alpha\beta)}$ liegen, mit der anderen wird sie eine Regelfläche dritter Ordnung bestimmen. Die auf einer $G_{(\alpha\beta)}$ liegenden Linien von Σ_α und Σ_β der Ebene haben in (0α) und (0β) zugehörige Linien, welche sich schneiden. Die zehn Strahlen der beliebigen Ebene haben desshalb in den fünf Ebenen (0α) zugehörige Linien, welche sich paarweise schneiden

*) Vgl. *Reye* a. a. O. Das hier erhaltene Flächennetz ist reciprok zu dem, welches Herr *Reye* verwendet.

und desshalb eine Fläche zweiter Ordnung F_2 bestimmen, welche die fünf Ebenen (0α) als Tangentialebenen besitzt.

Zu jeder Ebene des Raumes gehört in dieser Weise eine Fläche der zweiten Ordnung F_2, welche von der Ebene berührt wird. Beide schneiden sich in den zwei zu Σ_0 gehörenden Strahlen; denn zu einem Strahle $l^{(\alpha)}$ von Σ_α gehört in (0α) eine Linie, die von denjenigen $l^{(\alpha)}$ treffenden Strahlen des Systems Σ_0 geschnitten wird, welche auf einer Fläche dritter Ordnung liegen, deren Doppelgerade $l^{(\alpha)}$ ist. Es haben demnach die in der Ebene liegenden Strahlen von Σ_0 je fünf Punkte mit F_2 gemein und liegen desshalb auf F_2.

Bewegt sich die Ebene um eine Gerade, so werden die beiden in ihr liegenden Strahlen von Σ_α die Ebene (0α) stets in zwei Punkten treffen, deren Verbindungslinien einen Strahlenbüschel erster Ordnung bilden. In der reciproken Beziehung in (0α) erhalten wir daher als Ort der Schnittpunkte der zu den Strahlen gehörigen Linien eine gerade Punktreihe.

Daher: Die Berührungspunkte der den Ebenen eines Büschels entsprechenden F_2 mit den festen Tangentialebenen beschreiben gerade Linien; oder F_2 beschreibt eine Flächenschaar.

Dreht sich die Ebene um einen Punkt, so erhalten wir einfach unendlich viele Flächenschaaren, von welchen je zwei eine gemeinschaftliche Fläche haben. F_2 beschreibt eine Schaar-Schaar.

Man erkennt hiernach, dass alle Flächen F_2 ein Netz bilden, welches fünf feste Tangentialebenen besitzt. Dieses Netz ist projectivisch bezogen auf alle Ebenen des Raumes, und jede Fläche wird von der ihr entsprechenden Ebene berührt.

Hauptstrahlen des Netzes sind zunächst alle Linien der Ebenen (0α), *welchen in der projectivischen Verwandtschaft die Strahlensysteme Σ_α entsprechen.*

Ausserdem sind noch alle Strahlen von Σ_0 Hauptstrahlen des Netzes und entsprechen sich selbst.

Durch jeden Punkt des Raumes gehen drei Strahlen von Σ_0, welche drei Ebenen bestimmen, die mit den fünf festen Ebenen (0α) *acht associirte Ebenen bilden.*

Alle Ebenen, welche Strahlen von Σ_0 verbinden, die in Punkten einer beliebigen Ebene zusammentreffen, umhüllen eine F_2.

Ist F_2 eine besondere Fläche, welche aus einem doppelt zählenden

Kegelschnitt resp. der doppelt zählenden Ebene desselben besteht, so berührt F_2 bekanntlich die Kernfläche des Netzes. Die entsprechende Ebene hat mit dieser Fläche einen zweimal zählenden Strahl von Σ_0 gemein, und in der Ebene liegt kein weiterer Strahl dieses Systemes.

Die Doppelebenen des Netzes entsprechen den Tangentialebenen der Brennfläche eindeutig, und diese ist dadurch auf die Kernfläche abgebildet.

Die Tangentialebenen der letzteren, die auch von der vierten Classe ist, können nach §. 5 construirt werden, worauf aber nicht näher eingegangen werden soll.

Die sechs Strahlensysteme $\Sigma_\alpha (\alpha = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ sind die Hauptstrahlen von sechs verschiedenen Flächennetzen, von welchen jedes fünf feste Tangentialebenen besitzt.

Den zehn Punktepaaren eines Netzes entsprechen stets die zehn nicht das Netz berührenden singulären Ebenen der Brennfläche.

Jedes Punktepaar enthält einen Punkt, welcher mit einem singulären Punkte der Brennfläche zusammenfällt.

Betrachten wir nämlich das aus Σ_0 hervorgehende Netz. Die drei Ebenen (01), (02), (03) schneiden sich in einem Punkte, der zu einem Punktepaare gehört; der zweite Punkt des Paares liegt auf der Schnittgeraden von (04) und (05). Dem Paare entspricht eine durch den zweiten Punkt gehende Ebene, die alle Strahlen von Σ_1 enthält, welche den durch den ersten Punkt gehenden in (01) liegenden Geraden zugehören. Diese Strahlen von Σ_1 liegen aber in der Ebene (bA) oder (45) und bilden daselbst einen Büschel mit dem Mittelpunkte B. Die drei Ebenen (04), (05), (45) schneiden einander aber in (045) oder A, welcher Punkt mit dem Schnittpunkte der Ebenen (01), (02), (03) ein Punktepaar des Netzes bildet. Ebenso findet man, dass die Punkte:

M	oder	(012)	und der Schnittpunkt	von	(03), (04), (05)	
N	-	(013)	- - -	-	(02), (04), (05)	
O	-	(014)	- - -	-	(02), (03), (05)	
P	-	(015)	- - -	-	(02), (03), (04)	etc.

Punktepaare des Netzes bilden.

Wir können nun zeigen, *dass jedes Flächennetz mit fünf festen Tangentialebenen eine Construction seiner Hauptstrahlen zulässt, wie sie für das Strahlensystem Σ_0 gegeben worden ist.*

Das Netz ist vollständig bestimmt durch vier seiner Punktepaare. Wir greifen vier heraus, und zwar solche, deren Punkte (welche nicht in den Schnittpunkten dreier Ebenen liegen) sich in einer der festen Ebenen befinden. Diese Punkte bezeichnen wir mit M, N, O, P; die Ebene mit (01); die durch M, N, O, P gehenden festen Tangentialebenen nennen wir (02), (03), (04), (05) und bestimmen nun in (01) eine reciproke Verwandtschaft der Art, dass dem Punkte

M	die Schnittgerade von	(01), (02)
N	- - -	(01), (03)
O	- - -	(01), (04)
P	- - -	(01), (05)

entspricht. Wir construiren ferner die Punkte A und B, indem wir durch den Diagonalpunkt $\overline{MN}\ \overline{OP}$ die Gerade legen, welche die Schnittlinie der Ebenen (04) und (05) und gleichzeitig die der Ebenen (02) und (03) trifft; auf der ersten Geraden erhält man so den Punkt A, auf der zweiten den Punkt B. Nun mache man die Construction von Σ_0 nach §. 1 und man wird die Hauptstrahlen des Flächennetzes erhalten.

§. 7.
Specialfälle.

Von den mannichfachen Specialisirungen der Strahlensysteme will ich nur zwei anführen, welche besonderes Interesse bieten. Ich schliesse wieder an die in §. 1 gegebene Construction an.

Das reciproke System in der Ebene (01) sei ein *Polarsystem;* die beiden Strahlenbüschel A und B seien wie früher der Art angenommen, dass sie einen gemeinschaftlichen Strahl haben. Das System Σ_0 steht dann in enger Beziehung zu einem *Strahlencomplex zweiten Grades. Plücker**) hat in Bezug auf einen solchen Complex jeder Geraden des Raumes eine *Polare* zugeordnet. Bewegt sich die Gerade in einer *Ebene* (01), so beschreibt die *Polare* ein *Strahlensystem* Σ_0. Die singulären Punkte des Strahlensystems liegen so, dass die Geraden $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ in einem Punkte K zusammentreffen, welcher durch die mit ihm auf einer Geraden liegenden singulären Punkte von der Ebene (01) harmonisch getrennt ist. Der Punkt

*) *Plücker*, Neue Geometrie des Raumes. Leipzig 1868. S. 319.

K ist nach *Plücker* der *Pol* der *Ebene* (01) in Bezug auf den Complex. Das Strahlensystem Σ_1 geht aus Σ_0 durch eine involutorisch-collineare Beziehung zweier räumlichen Systeme hervor; das Involutionscentrum ist der Punkt *K*, die Involutionsebene (01). Das Strahlensystem Σ_1 hat für den Complex zweiten Grades die Bedeutung, dass es alle *Polaraxen* der Ebene (01) in Bezug auf die Complexkegel enthält, deren Mittelpunkte dieser Ebene angehören.

Durch die collineare Verwandtschaft, die zwischen Σ_0 und Σ_1 besteht, gehen die übrigen Strahlensysteme Σ_2, Σ_3, Σ_4, Σ_5 jedes in sich selbst über.

Die vier Punkte *M, N, O, P* liefern ein Polardreieck der Ordnungscurve des in (01) befindlichen Polarsystems. Jeder Eckpunkt des Dreiecks kann als Involutionscentrum, die Ebene, welche die anderen Eckpunkte mit *K* verbindet, zur Involutionsebene zweier collinearen räumlichen Systeme gewählt werden; es geht dann wieder Σ_0 in Σ_1 und die anderen Strahlensysteme paarweise in einander über.

Für alle Regelflächen, welche Σ_0 und Σ_1 verbinden, giebt es ein gemeinschaftliches *Polartetraeder*.

Die Brennfläche der Strahlensysteme hat in der *Ordnungscurve* des Polarsystems in (01) eine *Cuspidalkante*.

Eine weitere Specialisirung erhält man, wenn die vier Punkte *M, N, O, P vier harmonische* Punkte der Ordnungscurve des Polarsystems werden. Dann erhält die Brennfläche *drei* Cuspidalkanten in den Ebenen (01), (45), (23), und die sechs Strahlensysteme sind dadurch paarweise geordnet. Zwei Systeme eines Paares haben die Beziehung zu einander, welche bei dem ersten Specialfall zwischen Σ_0 und Σ_1 gefunden wurde. Die drei Cuspidalkanten liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung, und es bleiben nur vier eigentliche Knotenpunkte der Brennfläche übrig, welche in einer Ebene liegen. Die Gleichung der Brennfläche nimmt die einfache Form $4(x^2+y^2+z^2-r^2)^3-27z^2(x^2-y^2)^2=0$ an.

Aachen im Juli 1880.

Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linien zu sein.

(Hierzu Taf. I Fig. 2.)

(Von Herrn *Hans v. Mangoldt* in Freiburg in Baden.)

In *C. G. J. Jacobis* „Vorlesungen über Dynamik", herausgegeben von *Clebsch* (Berlin, G. Reimer, 1866), findet sich auf pag. 46 folgende Stelle:

„Wenn man von einem Punkt einer Oberfläche nach allen Richtungen kürzeste Linien zieht, so können zwei Fälle eintreten: zwei unendlich nahe kürzeste Linien laufen entweder fortwährend neben einander, ohne sich zu schneiden, oder sie schneiden sich wiederum, und alsdann bildet die Continuität aller Durchschnittspunkte ihre einhüllende Curve. Im ersten Fall hören die kürzesten Linien nie auf kürzeste zu sein, im zweiten sind sie es nur bis zum Berührungspunkte mit der einhüllenden Curve.

Das Erstere findet, wie sich von selbst versteht, bei allen developpabeln Flächen statt, denn in der Ebene schneiden sich die durch einen Punkt gehenden Geraden nie wieder; ferner findet es auch, wie ich gefunden habe, bei allen concav-convexen Flächen statt, d. h. bei denjenigen, in welchen zwei auf einander senkrechte Normalschnitte ihre Krümmungshalbmesser nach entgegengesetzten Seiten haben, z. B. bei dem einschaligen Hyperboloid und bei dem hyperbolischen Paraboloid. Hiermit soll übrigens nicht gesagt sein, dass es nicht auch concav-concave Flächen geben könnte, welche in diese Kategorie gehören, wenigstens ist die Unmöglichkeit hiervon nicht bewiesen. Ein Beispiel der zweiten Art giebt das Revolutionsellipsoid."

Die hier aufgeworfenen Fragen, auf deren Behandlung *Jacobi* selbst nirgends weiter eingegangen ist, sind bereits mehrfach Gegenstand der Be-

trachtung gewesen.*) Dabei sind namentlich verschiedene Beweise des Satzes gefunden worden, dass auf einer ***negativ*** gekrümmten Fläche zwei unendlich nahe benachbarte geodätische Linien, welche von einem Punkte ausgehen, sich nicht wieder schneiden. Aber für Flächen ***positiven*** Krümmungsmasses scheint mir das angegebene Problem noch nicht vollständig erledigt zu sein.

In der vorliegenden Arbeit sollen daher diese letzteren nach einer kurzen Zusammenstellung der Beweise des Satzes für negativ gekrümmte Flächen den Hauptgegenstand der Betrachtung bilden. Die dabei gewonnenen Resultate sind in Kürze folgende: die vom Scheitel eines Rotations-Paraboloids, oder zweischaligen Rotations-Hyperboloids ausgehenden Meridiane bilden ein erstes Beispiel von geodätischen Linien auf positiv gekrümmten Flächen, welche von einem Punkte ausgehen, ohne sich wieder zu treffen. Dieses Beispiel führt dazu, auf jeder Fläche zwei verschiedene Arten von Punkten zu unterscheiden: Erstens solche, die so beschaffen sind, dass unter den von ihnen ausgehenden geodätischen Linien zwei unendlich nahe benachbarte sich niemals schneiden, und zweitens solche, bei denen unter den von ihnen ausgehenden geodätischen Linien wenigstens einige vorkommen, welche von den unendlich nahe benachbarten geschnitten werden. Zur Abkürzung bezeichnen wir diese Punkte resp. als Punkte erster und zweiter Art.

Beschränkt man nun die Betrachtung auf Flächen, welche von Singularitäten frei sind, so zeigt sich zunächst, dass eine durchweg positiv gekrümmte Fläche überhaupt nur dann Punkte erster Art enthalten kann, wenn ihre curvatura integra nicht grösser ist, als die halbe Einheits-Kugel, d. h. wenn die Fläche offen ist, wie z. B. ein elliptisches Paraboloid, oder die eine Schale eines zweischaligen Hyperboloids. Aber auch wenn diese Bedingung erfüllt ist, können unmöglich alle Punkte von der ersten Art sein; die Punkte erster Art erfüllen vielmehr stets nur einen ***endlichen***

*) Man vergleiche: *Christoffel,* „Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke", Abhandlungen der Kgl. Akad. der Wiss. zu Berlin, 1868, pag. 151—153. — *W. Thomson* und *P. G. Tait,* Handbuch der theoretischen Physik, deutsche Uebersetzung von Dr. *H. Helmholtz* und *G. Wertheim,* I. Bd. 1. Theil, pag. 324. — Die Dissertation des Herrn Dr. *A. v. Braunmühl,* „Ueber geodätische Linien auf Rotationsflächen und jene Einhüllenden derselben, welche von allen durch einen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden", München (1878), von welcher ein mehrere Zusätze enthaltender Auszug in den Math. Annalen, Bd. XIV, pag. 557 f. erschienen ist. — Endlich *O. Bonnet,* „Sur quelques propriétés des lignes géodésiques", Comptes rendus de l'Ac. des Sciences T. 40, pag. 1311—1313.

Theil der Fläche, der aus einem, oder mehreren zusammenhängenden Stücken bestehen kann, während der Rest nur Punkte zweiter Art enthält. — Schliesslich wird für die hier in Betracht kommenden Flächen zweiten Grades die Gestalt der Curve untersucht, welche die Bereiche der Punkte erster und zweiter Art von einander scheidet. Auf dem zweischaligen Hyperboloid besitzt diese eine lemniscatenartige Gestalt. Das Gebiet der Punkte erster Art ist nämlich bei dem Rotations-Hyperboloid ein den Scheitel enthaltendes Flächenstück, welches von einem Parallelkreis begrenzt wird. Und lässt man das Rotations-Hyperboloid dadurch in ein dreiaxiges Hyperboloid übergehen, dass man die eine der beiden gleichen Axen verkleinert, so schnürt sich der Bereich der Punkte erster Art in der Umgebung des Scheitels zusammen, bis er zuletzt in zwei getrennte Flächentheile zerfällt, welche nur noch die Nabelpunkte umgeben. — Auf den Paraboloiden endlich giebt es nur einzelne discrete Punkte erster Art, und zwar sind dies auf dem Rotations-Paraboloid der Scheitel und auf dem elliptischen Paraboloid die beiden Nabelpunkte.

I.

Beweis des *Jacobi*schen Satzes für Flächen negativen Krümmungsmasses.

Es sei eine beliebige Fläche vorgelegt, über deren Krümmung wir zunächst noch nichts voraussetzen, und es sei A einer ihrer Punkte, in welchem sie keine Singularitäten besitzt, so dass man ihn zum Anfangspunkt eines Systems geodätischer Polarcoordinaten nehmen kann. Man bezeichne mit u die Länge des geodätischen Bogens von A bis zu einem beliebigen Punkte B der Fläche und mit v den Winkel, den das erste Element dieses Bogens mit einer in der Tangentialebene des Punktes A willkürlich fixirten Richtung bildet. Ferner seien x, y, z die Coordinaten des Punktes B in einem dreiaxigen rechtwinkligen Coordinatensystem. Für die in der Nähe von A gelegenen Punkte der Fläche sind dann x, y, z analytische Functionen

$$x = \varphi(u, v); \quad y = \psi(u, v); \quad z = \chi(u, v)$$

der beiden Grössen u, v, welche die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(1.) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2 = 1$$

und

$$(2.) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0$$

erfüllen. Zur Abkürzung setzen wir

$$m = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2}$$

mit der näheren Bestimmung, dass für die in der Nähe von A gelegenen Punkte der positive Werth der Wurzel genommen werden soll. Nach *Gauss* (Disq. gen. c. sup. curv. Werke, Bd. IV, pag. 244) ist dann für $u = 0$

$$m = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial m}{\partial u} = 1$$

bei beliebigem Werthe von v.

Wir wollen uns nun die Fläche frei von allen solchen Singularitäten denken, welche eine Fortsetzung der geodätischen Linien unmöglich machen, d. h. analytisch ausgedrückt, wir nehmen an, dass die Functionen φ, ψ, χ für alle endlichen und reellen Werthe der Argumente u, v existiren und den Charakter ganzer Functionen besitzen. In Bezug auf das Argument v sollen sie ferner die Periode 2π haben. Wir fassen nun zwei benachbarte von A ausgehende geodätische Linien, welche den Werthen v_1 und $v_1 + dv$ von v entsprechen, näher ins Auge und nehmen an, dass diese Linien noch einen zweiten Schnittpunkt besitzen, dessen geodätische Entfernung von A sich bei unbegrenzter Abnahme von dv einer endlichen Grenze u_1 nähert. Soll dies der Fall sein, so müssen zwei innerhalb gewisser Grenzen convergente und zugleich mit dv verschwindende Potenzreihen r, s der Variabeln dv existiren, welche die folgenden drei Gleichungen gleichzeitig erfüllen:

$$(3.) \quad \begin{cases} \varphi(u_1 + r,\ v_1) = \varphi(u_1 + s,\ v_1 + dv), \\ \psi(u_1 + r,\ v_1) = \psi(u_1 + s,\ v_1 + dv), \\ \chi(u_1 + r,\ v_1) = \chi(u_1 + s,\ v_1 + dv), \end{cases}$$

oder

$$0 = (s - r) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + dv \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \cdots,$$

$$0 = (s - r) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} + dv \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} + \cdots,$$

$$0 = (s - r) \cdot \frac{\partial \chi}{\partial u} + dv \cdot \frac{\partial \chi}{\partial v} + \cdots.$$

Hierbei, so wie in dem zunächst Folgenden muss man sich in den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \psi}{\partial u}$, ... $\frac{\partial \chi}{\partial v}$ für u, v die Specialwerthe u_1, v_1 substituirt denken. — Multiplicirt man diese drei Gleichungen resp. mit

$\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, $\frac{\partial\chi}{\partial v}$ und addirt, so ergiebt sich in Folge der Gleichung (1.)

$$0 = m^2 dv + \cdots$$

d. h. *die geodätischen Polarcoordinaten* u_1, v_1 *des Schnittpunktes zweier unendlich nahe benachbarten geodätischen Linien, welche von A ausgehen, müssen die Gleichung*

$$m = 0$$

erfüllen.

Nun besteht aber zwischen der Grösse m und dem Krümmungsmass k der Fläche im Punkte u, v die Gleichung (*Gauss*, Disq. gen. etc. Werke, Bd. IV, pag. 244)

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + m.k = 0.$$

Wenn wir daher zu unseren bisherigen Voraussetzungen noch die neue hinzufügen, dass auch die Function k für alle endlichen reellen Werthsysteme u, v den Charakter einer ganzen Function besitzt und beständig negativ bleibt, so müssen m und $\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$ stets dasselbe Zeichen haben. Für kleine Werthe von u ist aber m, also auch $\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$ positiv. Also nimmt $\frac{\partial m}{\partial u}$ von dem Anfangswerth 1 ausgehend mit wachsendem u zu. Folglich wächst auch m mit wachsendem u, und zwar ist seine Zunahme eine beschleunigte; m bleibt daher auf der ganzen Fläche positiv und verschwindet nur für $u = 0$. Also können zwei unendlich nahe benachbarte geodätische Linien, welche von A ausgehen, sich niemals wieder schneiden. Da A ein ganz beliebiger Punkt unserer Fläche war, so ist hiermit bewiesen, dass eine durchweg negativ gekrümmte Fläche nur Punkte erster Art enthalten kann.

Dies ist der von Herrn *Christoffel* in der oben citirten Abhandlung gegebene Beweis. Er zeigt nur, dass zwei *unendlich nahe benachbarte* von einem Punkt ausgehende geodätische Linien sich nicht wieder schneiden, lässt aber die Frage offen, ob vielleicht zwei geodätische Linien, welche unter einem Winkel von *endlicher* Grösse von einem ersten Schnittpunkt ausgehen, noch ein zweites Mal zusammentreffen können. Diese Frage wird durch den folgenden zweiten Beweis erledigt, der sich in dem Handbuche von *Thomson* und *Tait* a. a. O. angedeutet findet.

Nach einem bekannten Theorem von *Gauss* (Disq. gen. etc. Werke, Bd. IV, pag. 246) ist die curvatura integra eines endlichen, stetig gekrümm-

ten Flächenstücks, welches von n geodätischen Linien begrenzt wird, gleich dem Ueberschuss der Summe seiner Winkel über $(2n-4)\cdot\frac{\pi}{2}$, und zwar auch dem Zeichen nach. Auf einer Fläche negativer Krümmung können sich daher zwei unendlich nahe benachbarte geodätische Linien nicht wieder schneiden, denn sonst würden sie ein Zweieck bilden, welches eine negative curvatura integra, aber eine positive Winkelsumme besässe. Und schneiden sich zwei geodätische Linien unter einem Winkel von endlicher Grösse, so ist ein zweites Zusammentreffen nur in zwei Fällen möglich: Entweder, wenn die Fläche Punkte besitzt, wo das Krümmungsmass unendlich wird, oder zu existiren aufhört; oder, wenn die Fläche eine mehrfach zusammenhängende ist, wie z. B. ein einschaliges Hyperboloid. Dagegen können sich auf einer Fläche, wie z. B. dem hyperbolischen Paraboloide, welche in allen Punkten eine negative Krümmung von endlicher Grösse besitzt und nur einfach zusammenhängt, irgend zwei geodätische Linien nie in mehr als einem Punkte schneiden.

II.

Untersuchung der Flächen positiven Krümmungsmasses.

Für die Untersuchung der Flächen positiver Krümmung behalten wir die im vorigen Abschnitt eingeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen bei, mit der einzigen Aenderung, dass wir die Grösse k jetzt als beständig positiv voraussetzen. Wir hatten gefunden, dass die geodätischen Polarcoordinaten u_1, v_1 des Schnittpunktes zweier unendlich nahe benachbarten von A ausgehenden geodätischen Linien die Gleichung $m=0$ erfüllen müssen. ***Diese Bedingung erweist sich nun in unserem Falle nicht bloss als nothwendig, sondern auch als hinreichend.*** In der Voraussetzung, dass die Fläche im Punkte u_1, v_1 ein Krümmungsmass von endlicher Grösse besitzt, ist nämlich die andere enthalten, dass in diesem Punkte sowie in allen Punkten seiner Umgebung eine und nur eine völlig bestimmte Normale existirt, deren Richtung sich stetig ändert. Bezeichnen daher x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Coordinaten des Punktes u_1, v_1 und x_1+dx, y_1+dy, z_1+dz die Coordinaten eines beliebigen Punktes seiner Umgebung, so kann man es durch eine passende Drehung des Coordinatensystems stets erreichen, dass durch irgend zwei der Grössen dx, dy, dz die dritte eindeutig bestimmt ist. Wenn wir uns das Coordinatensystem von vorn herein so gewählt denken,

dass dies eintritt, so wird jede der Gleichungen (3.) eine Folge der beiden anderen, und wir haben nur zu zeigen, dass zwei Potenzreihen r, s existiren, welche irgend zwei dieser Gleichungen befriedigen. Hierzu müssen wir aus den Differentialgleichungen (1.) und (2.) zunächst einige Folgerungen ziehen. Wir schreiben diese Gleichungen in der abgekürzten Form

$$\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 = 1 \quad \text{und} \quad \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0,$$

wo das Zeichen Σ andeutet, dass in dem darunter stehenden Ausdruck φ mit ψ und χ vertauscht und die drei so erhaltenen Grössen addirt werden sollen.

Durch Differentiation der ersten Gleichung nach u und nach v ergeben sich die Gleichungen

$$(4.)\qquad \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = 0,$$

$$(5.)\qquad \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

und durch Differentiation der zweiten nach u und v

$$(6.)\qquad \Sigma\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right) = 0,$$

$$(7.)\qquad \Sigma\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) = 0.$$

Aus den Gleichungen (5.) und (6.) folgt

$$\Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v} = 0,$$

und durch Differentiation dieser Gleichung nach u und v ergeben sich

$$(8.)\qquad \Sigma\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^3}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\right) = 0$$

und

$$(9.)\qquad \Sigma\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) = 0.$$

Für den betrachteten Punkt, wo die drei Grössen $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}$, $\frac{\partial\chi}{\partial v}$ sämmtlich verschwinden, nehmen die Gleichungen (7.), (8.), (9.) resp. die Form an

$$(10.)\qquad \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = 0,$$

$$(11.)\qquad \Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

$$(12.)\qquad \Sigma\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = 0.$$

Nun ist unter den Determinanten zweiten Grades aus dem System

$$\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} & \frac{\partial^2\chi}{\partial u^2} \end{matrix}$$

mindestens eine von Null verschieden; denn wären die entsprechenden Elemente beider Zeilen einander proportional, so würden die Gleichungen (1.) und (4.) einander widersprechen, ausser in dem Fall, wenn alle Elemente der zweiten Zeile Null wären. Dies kann aber hier gar nicht eintreten, weil sonst der Krümmungsradius

$$r = \frac{1}{\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\right)^2}}$$

der Curve $v = v_1$ im Punkte $u = u_1$ unendlich, also das Krümmungsmass k in diesem Punkte Null, oder negativ sein müsste. Daher ergiebt sich aus den Gleichungen (5.) und (10.) — (12.) das später zu benutzende Resultat, ***dass die Elemente der beiden Zeilen***

$$\begin{matrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v} & \frac{\partial^2\chi}{\partial u\partial v} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} & \frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} & \frac{\partial^2\chi}{\partial v^2} \end{matrix}$$

einander proportional sein müssen. Denn sieht man in den Gleichungen (5.) und (11.) die Grössen $\frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdots$ und $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdots$ als Coefficienten, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdots$ aber als Unbekannte an, so sind diese Gleichungen von einander unabhängig, so dass das zweite Lösungssystem $\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdots$, welches sie in Folge der Gleichungen (10.) und (12.) besitzen, sich von dem ersten nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann. Hierbei ist noch wichtig zu bemerken, dass die drei Grössen $\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdots$ selbst jedenfalls nicht sämmtlich Null sind; denn da m der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} + k.m = 0$$

genügt, so muss, wenn m verschwindet, $\frac{\partial m}{\partial u}$ von Null verschieden sein, weil sonst durch wiederholte Differentiation jener Gleichung nach u folgen würde, dass im Punkte u_1, v_1 die partiellen Ableitungen von m nach u sämmtlich

gleich 0 wären. Nun folgt aber aus der Gleichung

$$m^2 = \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$$

durch Differentiation nach u

$$m\cdot\frac{\partial m}{\partial u} = \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v},$$

und wäre

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v} = 0,$$

so würde die rechte Seite der vorstehenden Gleichung als Function von u betrachtet im Punkte u_1, v_1 mindestens von der zweiten, die linke aber nur von der ersten Ordnung verschwinden. Hieraus folgt endlich, dass mindestens eine der Determinanten zweiten Grades aus dem System

$$\begin{matrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2\psi}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2\chi}{\partial u\,\partial v} \end{matrix}$$

von Null verschieden ist, denn sonst ständen die Gleichungen (1.) und (5.) in Widerspruch mit einander.

Wir entwickeln nun beide Seiten der Gleichungen (3.) bis zu den Gliedern dritter Dimension. Dies giebt, wenn wir die mit $\frac{\partial\varphi}{\partial v}$ behafteten Glieder sowie die Grösse $\varphi(u_1, v_1)$, welche auf beiden Seiten vorkommt, gleich weglassen:

$$(13.)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot r + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot r^2 + \cdots = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\cdot s + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}\cdot s^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v}\cdot s\,dv + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\cdot dv^2\right) + \cdots$$

und zwei ähnliche Gleichungen in ψ und χ.

Multiplicirt man diese drei Gleichungen resp. mit $\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial\psi}{\partial u}$, $\frac{\partial\chi}{\partial u}$ und addirt, so ergiebt sich in Folge der Gleichungen (4.), (5.) und (10.), dass die Glieder erster und zweiter Dimension in den Entwickelungen von r und s übereinstimmen. Wir setzen daher zunächst

$$r = a_1\,dv + a_2\,dv^2 + dv^3\,\mathfrak{P}(dv),$$
$$s = a_1\,dv + a_2\,dv^2 + dv^3\,\mathfrak{P}_1(dv).$$

dann zeigt die Vergleichung der Coefficienten von dv^2 in den vorstehenden Gleichungen, dass

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}\cdot a_1+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = 0$$

. . . .

oder

$$a_1 = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{\partial^2\chi}{\partial v^2}}{\dfrac{\partial^2\chi}{\partial u\partial v}}$$

sein muss. Behalten wir zur Abkürzung für die drei rechts stehenden Quotienten das gemeinsame Zeichen a_1 bei, so können wir also setzen

$$r = a_1.dv+\varrho.dv,\quad s = r+\varepsilon.dv^2 = a_1.dv+\varrho.dv+\varepsilon.dv^2$$

und haben nun bloss zu zeigen, dass zwei zugleich mit dv verschwindende Potenzreihen ϱ, ε existiren, welche irgend zwei der drei Gleichungen erfüllen, die aus den Gleichungen (13.) durch Substitution der eben angegebenen Werthe von r und s hervorgehen. Wenn wir diejenigen Glieder, welche auf beiden Seiten vorkommen, oder verschwinden, oder sich gegenseitig zerstören, gleich weglassen, so können wir alle drei Gleichungen durch dv^2 dividiren. Bei Weglassung auch dieses Factors erhält die erste Gleichung die Gestalt

$$(14.)\quad 0 = \varepsilon\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\varrho\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+dv\cdot\tfrac{1}{6}\Big(3\frac{\partial^3\varphi}{\partial u^2\partial v}\cdot a_1^2+3\frac{\partial^3\varphi}{\partial u\partial v^2}\cdot a_1+\frac{\partial^3\varphi}{\partial v^3}\Big)+\cdots$$

und die beiden anderen Gleichungen ergeben sich durch Vertauschung von φ mit ψ und χ. Hier ist aber nach dem Obigen mindestens eine der aus den Coefficienten von ε und ϱ gebildeten Determinanten von Null verschieden. Also giebt es wirklich zwei Potenzreihen ε, ϱ, welche zwei der Gleichungen (14.) erfüllen, und damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Wir nehmen nun an, der Punkt A sei von der ersten Art, d. h. also m sei auf der ganzen Fläche mit alleiniger Ausnahme des Punktes A von Null verschieden und positiv. Da jetzt k positiv ist, so ist $\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} = -k.m$ negativ, und $\frac{\partial m}{\partial u}$ nimmt daher von dem Anfangswerthe 1 für $u = 0$ ausgehend mit wachsendem u beständig ab. *Dabei kann diese Grösse aber nicht bis zu Null herabsinken;* denn würde sie für irgend ein endliches Werthepaar u, v einmal Null, so würde sie bei weiterer Vergrösserung von u negativ werden, und es gäbe einen Punkt u_0, v_0, wo $\frac{\partial m}{\partial u}$ einen negativen Werth, $-\alpha$, besässe. Bezeichnet m_0 den Werth von m in diesem Punkte, so würde m, wenn u weiter wächst, schneller abnehmen, als die Grösse $m_0-\alpha(u-u_0)$, also noth-

wendig einmal Null werden, gegen die Voraussetzung. Wir denken uns nun um den Punkt A mit dem beliebigen Radius U einen geodätischen Kreis geschlagen und betrachten den Sector, der aus diesem durch die beiden Radien ausgeschnitten wird, welche den Werthen $v_2 > v_1$ von v entsprechen. Die curvatura integra C dieses Sectors wird dargestellt durch das Integral

$$C = \int_0^U \int_{v_1}^{v_2} k.m.du\,dv = -\int_0^U \int_{v_1}^{v_2} \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\,du\,dv$$
$$= \int_{v_1}^{v_2} \left[1 - \left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)_{u=U}\right] dv < v_2 - v_1.$$

Da die Grösse C mit wachsendem U beständig zunimmt, ohne indess die Grenze $v_2 - v_1$ erreichen zu können, so muss sie sich mit unbegrenzt wachsendem U einer endlichen Grenze

$$C' \leqq v_2 - v_1$$

nähern, welche wir die *„curvatura integra des Winkels der beiden betrachteten geodätischen Linien“* nennen wollen.

Hiernach ist *also die curvatura integra des Winkels zweier geodätischen Linien, welche von A ausgehen, niemals grösser als dieser Winkel selbst.* Nehmen wir die Differenz $v_2 - v_1 = 2\pi$, so ergiebt sich folgender Satz:

Schlägt man um den Punkt A als Mittelpunkt einen geodätischen Kreis, so nähert sich dessen curvatura integra bei unbegrenzt wachsendem Radius einer endlichen Grenze $K \leqq 2\pi$.

Die Grösse K werden wir passend als „curvatura integra“ der ganzen Fläche bezeichnen. Sie ist bei den hier gemachten Voraussetzungen nie grösser als die halbe Oberfläche der Einheits-Kugel, d. h. *unsere Fläche muss eine offene sein, wenn sie einen Punkt erster Art enthalten soll.*

Nun können wir mit leichter Mühe den Satz beweisen, *dass jede Fläche positiven Krümmungsmasses nothwendig Punkte zweiter Art enthält.* Hierzu dient zunächst Folgendes: Wenn wir unter Beibehaltung unserer bisherigen Bezeichnungen auf unserer Fläche irgend ein geodätisches Dreieck zeichnen, welches den Punkt A zu einem Eckpunkt hat, und den Winkel bei A mit α, die beiden anderen mit β, γ bezeichnen, so muss stets $\beta+\gamma < \pi$ sein; denn wäre $\beta+\gamma > \pi$, so wäre $\alpha+\beta+\gamma-\pi > \alpha$, d. h. die curvatura integra des Dreiecks, welche doch nur einen Theil der curvatura integra des Winkels α bildet, wäre grösser als dieser letztere, gegen das oben Bewiesene. Wir schlagen nun um A mit dem willkürlich gewählten

Radius u_1 einen geodätischen Kreis und wählen auf dessen Peripherie ebenfalls willkürlich einen Punkt $P_1(u_1, v_1)$, (Taf. I, Fig. 2), durch den wir eine geodätische Linie senkrecht zu dem Radius AP_1 ziehen. Diese ist dann eine geodätische Tangente des Kreises, denn sie schneidet jeden von AP_1 verschiedenen Radius unter spitzem Winkel, trifft also nicht den Radius selbst, sondern dessen Verlängerung. Nun lassen wir auf der geodätischen Tangente durch P_1 einen Punkt $P(u, v)$ in der Richtung der wachsenden v fortschreiten und beweisen, dass dieser im Lauf seiner Bewegung nothwendig einmal zu einem Punkte zweiter Art werden muss. Der Winkel der kürzesten Linien PP_1 und PA, den wir mit θ bezeichnen, muss, wenn P fortschreitet, immer abnehmen. Denn bezeichnet P' einen Punkt auf der geodätischen Tangente und ist $P_1P' > P_1P$, so müssen in dem Dreieck PAP' die Winkel an der Grundlinie zusammen weniger als zwei Rechte betragen, d. h. es muss

$$\angle AP'P_1 < \angle APP_1$$

sein. Hieraus folgt, dass der Bogen AP von AP_1 beginnend beständig zunehmen und zuletzt unendlich werden muss; denn rückt P um ds weiter, so nimmt u um $ds.\cos\theta$ zu; seine Zunahme ist also eine beschleunigte. Nun hat man, wie aus der Figur leicht zu ersehen,

$$m.dv = du.\tan\theta,$$

also

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tan\theta}{m} > \frac{\tan\theta}{u},$$

da m stets $< u$ ist; und es sind jetzt zwei Fälle denkbar: Erstens, die fortwährend abnehmende Grösse θ nähert sich mit unbegrenzt wachsendem u einer von Null verschiedenen Grenze. Dann bleibt $\tan\theta$ beständig grösser als eine gewisse positive Grösse a, und man hat

$$\frac{dv}{du} > \frac{a}{u}; \quad \int_{u_1}^{u} \frac{dv}{du} \cdot du = v - v_1 > a.\log\frac{u}{u_1},$$

d. h. v kann beliebig gross werden und überschreitet daher den Werth $\frac{\pi}{2}$. Sobald dies aber eintritt, wird die curvatura integra des Winkels APP_1 sicher grösser als der Winkel selbst, was nur dann der Fall sein kann, wenn P zu einem Punkt zweiter Art geworden ist. —

Zweitens, θ nähert sich der Null unbegrenzt. Dann ist Folgendes zu beachten: Legt man durch A einen geodätischen Durchmesser des um A beschriebenen Kreises, so theilt dieser den Kreis in zwei Theile; bezeichnet man die curvatura integra des einen mit C und dreht darauf den Durchmesser

um A, so ist C eine von der Lage des Durchmessers abhängige Grösse, die sich mit dieser stetig ändert. Wenn nun der Durchmesser eine volle Umdrehung macht, so erwirbt C nothwendig einmal ein absolutes Minimum, welches eine von Null verschiedene positive Grösse ist, die wir mit c bezeichnen wollen. Die curvatura integra des Winkels θ bleibt nun offenbar beständig grösser als c. Andererseits ist es möglich, dem Punkt P eine solche Lage zu geben, dass $\theta < c$ wird, d. h. P wird auch in diesem Falle früher oder später ein Punkt zweiter Art. Hiermit ist die Unmöglichkeit der Existenz einer positiv gekrümmten Fläche bewiesen, die nur Punkte erster Art enthielte. Zugleich lässt der vorstehende Beweis erkennen, *dass die etwa vorhandenen Punkte erster Art sich immer nur innerhalb eines gewissen Gebietes von endlicher Ausdehnung vorfinden.*

Herr *Christoffel* hat in der oben citirten Abhandlung die Eigenschaften der Grösse m näher untersucht und für sie die Bezeichnung „Reducirte Länge" des geodätischen Bogens von A bis zu dem Punkte u, v eingeführt. Insbesondere hat er bewiesen, dass die reducirte Länge jedes geodätischen Bogens AB ungeändert bleibt, wenn man Anfangs- und Endpunkt mit einander vertauscht, oder, anders ausgedrückt, dass die reducirte Länge von AB derjenigen von BA gleich ist. Hieraus folgt unmittelbar, dass die reducirte Länge jedes geodätischen Bogens eine stetige Function der Coordinaten seiner beiden Endpunkte sein muss. Hat man daher auf einer Fläche einen Punkt erster Art gefunden, so werden in seiner Umgebung im Allgemeinen noch unendlich viel andere solche Punkte liegen, welche ein zusammenhängendes Flächenstück erfüllen. Zur Auffindung der Curve, welche auf einer positiv gekrümmten Fläche dieses Stück begrenzt, können folgende Betrachtungen dienen: Die Grösse $\frac{\partial m}{\partial u}$ nähert sich nach dem Früheren mit unbegrenzt wachsendem u einer zwischen 0 und 1 gelegenen Grenze, welche im Allgemeinen eine stetige Function des Winkels v und der Coordinaten x, y, z des Punktes A sein wird. Hält man nun den Punkt A fest und lässt nur v von 0 bis 2π variiren, so erwirbt diese Grenze einmal ein absolutes Minimum, welches nur noch von x, y, z abhängt und sich mit der Lage des Punktes A stetig ändert. Bezeichnen wir daher dieses Minimum mit $f(x, y, z)$, so wird die Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

in Verbindung mit der Gleichung der gegebenen Fläche die Curve liefern,

welche den Bereich der Punkte erster Art begrenzt. Denn für diese Punkte ist, wie wir früher sahen, nicht nur m, sondern auch $\frac{\partial m}{\partial u}$ beständig positiv.

In den folgenden Abschnitten soll der Bereich der Punkte erster Art auf den für uns in Betracht kommenden Flächen zweiten Grades aufgesucht werden. Dabei muss die Rechnung freilich meistens in anderer als der eben angegebenen Art durchgeführt werden.

III.

Bereich der Punkte erster Art auf dem zweischaligen Rotations-Hyperboloide.

Der Betrachtung der zweischaligen Hyperboloide muss zunächst eine allgemeine Bemerkung vorausgeschickt werden: Zieht man auf der einen Schale eines zweischaligen Hyperboloids eine geodätische Linie, so kann diese analytisch durch das Unendliche fortgesetzt werden, so dass sie auf der anderen Schale wieder erscheint. Bei dieser Art der Betrachtung treffen zwei von einem Punkte ausgehende geodätische Linien stets wieder zusammen, so dass überhaupt keine Punkte erster Art existiren. Da es uns aber wesentlich auf die Frage ankommt, wann eine geodätische Linie aufhören kann, kürzeste Verbindungslinie ihrer Endpunkte zu sein, so werden wir immer nur die eine Schale der Fläche ins Auge fassen und das Unendliche als eine Grenze der geodätischen Linien ansehen, über welche hinaus wir sie nicht fortsetzen. Ein Punkt des Hyperboloids heisst also nur dann von der zweiten Art, wenn es zwei von ihm ausgehende geodätische Linien giebt, welche auf derselben Schale wieder zusammenkommen.

Die vom Scheitel eines Rotations-Hyperboloids ausgehenden Meridiane sind selbst geodätische Linien, welche sich nicht wieder schneiden. Also ist der Scheitel ein Punkt erster Art; und wegen der Symmetrie der Fläche ist der Bereich der Punkte erster Art ein den Scheitel enthaltendes Flächenstück, welches durch einen Parallelkreis begrenzt wird. Um dessen Radius zu finden, stellen wir folgenden Satz auf:

Ein Punkt A des Hyperboloids ist von der ersten Art, wenn der von ihm durch den Scheitel gezogene Meridian von keiner unendlich nahe benachbarten geodätischen Linie geschnitten wird.

Zum Beweise brauchen wir einen Satz über Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welchen wir hier einschalten.

Es seien K und k zwei analytische Functionen der Variabeln u, welche

in dem Intervall $0 \leqq u \leqq u_1$ *den Charakter ganzer Functionen besitzen, reell und positiv sind und die Ungleichung* $K \geqq k$ *erfüllen. Ferner mögen durch die Differentialgleichungen*

$$\frac{d^2M}{du^2} + K.M = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{d^2m}{du^2} + k.m = 0$$

und durch die Anfangsbedingungen $M = m = 0$ *und* $\frac{dM}{du} = \frac{dm}{du} = 1$ *für* $u = 0$ *zwei Functionen* M *und* m *von* u *definirt werden. Bezeichnet dann* u_2 *den kleinsten zwischen* 0 *und* u_1 *gelegenen Werth von* u, *für welchen* $\frac{dM}{du}$ ver*schwindet, so ist innerhalb des Intervalles* $0 \dots u_2$

$$\frac{M}{\frac{dM}{du}} \geqq \frac{m}{\frac{dm}{du}},$$

und, wenn zwischen 0 *und* u_1 *ein solcher Werth* u_2 *nicht existirt, so gilt die vorstehende Ungleichung innerhalb des ganzen Intervalles* $0 \dots u_1$.

Beweis. Wir bezeichnen mit λ eine Veränderliche, welche das Intervall $0 \dots 1$ durchlaufen soll, setzen

$$h = k + \lambda(K - k)$$

und definiren eine neue Function n durch die Differentialgleichung

$$(15.) \quad \frac{d^2n}{du^2} + h.n = 0$$

und die Anfangsbedingungen $n = 0$ und $\frac{dn}{du} = 1$ für $u = 0$, bei beliebigem Werthe von λ. Die Grösse n ist dann eine analytische Function der Argumente u und λ, welche für hinlänglich kleine Werthe von u den Charakter einer ganzen Function besitzt. Durch Differentiation der Gleichung (15.) nach λ ergiebt sich

$$(16.) \quad \frac{\partial^3 n}{\partial u^2 \partial \lambda} + \frac{\partial h}{d\lambda} \cdot n + h \cdot \frac{\partial n}{\partial \lambda} = 0.$$

Indem wir Gleichung (15.) mit $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$ und (16.) mit $-n$ multipliciren und addiren, erhalten wir

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial u^2} - n \cdot \frac{\partial^3 n}{\partial u^2 \partial \lambda} - \frac{\partial h}{\partial \lambda} \cdot n^2 = 0$$

und durch Integration dieser Gleichung von 0 bis u

$$\left[\frac{\partial n}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial n}{\partial u}\right]_0^u - \int_0^u \frac{\partial^2 n}{\partial u \partial \lambda} \cdot \frac{\partial n}{\partial u} \cdot du - \left[n \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial u \partial \lambda}\right]_0^u + \int_0^u \frac{\partial n}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial u \partial \lambda} \cdot du$$
$$- \int_0^u \frac{\partial h}{\partial \lambda} \cdot n^2 . du = 0,$$

oder, da für $u = 0$ sowohl n als $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$ verschwindet,

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial n}{\partial u} - n \cdot \frac{\partial^2 n}{\partial u \partial \lambda} = \int_0^u \frac{\partial h}{\partial \lambda} \cdot n^2 . du.$$

Durch eine einfache Transformation der linken Seite und Einsetzung des Werthes $K - k$ für $\frac{\partial h}{\partial \lambda}$ ergiebt sich

$$\left(\frac{\partial n}{\partial u}\right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{n}{\frac{\partial n}{\partial u}} \right) = \int_0^u (K - k) . n^2 . du.$$

Für kleine Werthe von u ist daher der Differentialquotient $\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{n}{\frac{\partial n}{\partial u}} \right)$ Null, oder positiv, d. h. der Quotient $\frac{n}{\frac{\partial n}{\partial u}}$ nimmt bei wachsendem λ niemals ab und ist für $\lambda = 1$ grösser, oder mindestens eben so gross, als für $\lambda = 0$. Es besteht also die Ungleichung

$$\frac{M}{\frac{dM}{du}} \geqq \frac{n}{\frac{\partial n}{\partial u}} \geqq \frac{m}{\frac{dm}{du}},$$

und diese kann bei wachsendem u nur dann ihre Gültigkeit verlieren, wenn der grösste der hier vorkommenden Quotienten unendlich, also $\frac{dM}{du} = 0$ wird. Dieser Beweis ist im Wesentlichen in der Abhandlung von *C. Sturm* „Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre" (*Liouvilles* Journal, I. Sér. vol. 1, pag. 106—187) enthalten; doch schien es einfacher, das für unsere Zwecke Nothwendige direct zu beweisen, als es aus den dort gewonnenen allgemeineren Resultaten abzuleiten.

Nun sei

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2 + z^2}{\beta} = 1,$$

wo α eine positive, β eine negative Constante bedeutet, die Gleichung unseres Rotations-Hyperboloides. Zur Abkürzung werde

$$y^2 + z^2 = r^2$$

gesetzt. Zur Bestimmung des Krümmungsmasses k hat man hier die Gleichung (*Gauss,* Disq. gen. etc. Werke, Bd. IV, pag. 232)

$$\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{r^2}{\beta^2}\right)^2 \cdot k = \frac{x^2}{\alpha^2 \beta^2} + \frac{r^2}{\alpha \beta^3},$$

woraus sich leicht

$$k = \frac{\alpha\beta^2}{[\beta^2 + (\alpha - \beta)r^2]^2}$$

ergiebt, so dass k mit wachsendem r beständig abnimmt.

Der Punkt A (vgl. o.) möge jetzt zum Anfang eines Systems geodätischer Polarcoordinaten gemacht werden, auf welches wir unsere früheren Bezeichnungen anwenden, mit dem Zusatze, dass der von A über den Scheitel S gezogene Meridian dem Werthe $v = 0$ entsprechen soll. Wir beschränken v auf das Intervall $0 \ldots \pi$ und u auf ein Intervall $0 \ldots u_1$. Wählt man u_1 hinlänglich klein, so sind m und $\frac{dm}{du}$ innerhalb des mit dem Radius u_1 um A beschriebenen geodätischen Halbkreises beständig positiv, und die einzelnen Radien schneiden sich nirgends als im Punkte A. Giebt man dem u einen constanten Werth und lässt nur v variiren, so muss r mit wachsendem v beständig zunehmen. Wir lassen, um dies zu beweisen, v von dem Anfangswerthe 0 an wachsen und bezeichnen mit B den Punkt mit den Coordinaten u, v, mit B_0 seine Anfangslage für $v = 0$. Wenn dann B bei Beginn der Bewegung nach einem Punkte B_1 gelangte, der dem Scheitel S näher läge als B_0, so gäbe es, wenn u kleiner als der Bogen AS des Meridians ist, von A nach S eine kürzere Verbindung als diesen Bogen, nämlich die Linie AB_1S, und wenn $u > AS$ ist, von A nach B_1 eine kürzere Verbindung als den geodätischen Bogen AB_1, nämlich ASB_1. Das erstere widerspricht aber der Voraussetzung, dass der von A durch S gezogene Meridian von keiner benachbarten geodätischen Linie geschnitten wird, und das zweite der Annahme, dass m innerhalb der angegebenen Grenzen beständig positiv ist. Also nimmt r jedenfalls anfänglich zu. Sobald aber die geodätischen Bögen AB und SB einen von Null verschiedenen Winkel bilden, zeigen einfache geometrische Betrachtungen, dass r mit wachsendem v zunehmen muss. Hieraus folgt, dass k mit wachsendem v abnimmt. Nach dem oben bewiesenen Satze muss daher auch die Grösse $\frac{m}{\frac{\partial m}{\partial u}}$ mit wachsendem v abnehmen. Wenn es nun Punkte gäbe, wo m verschwindet, so müsste man es durch Vergrösserung von u_1 erreichen können, dass nicht im Innern, wohl aber auf der Peripherie unseres Halbkreises ein oder mehrere solche Punkte lägen. Einer dieser Punkte heisse P. Dann müsste auf dem Radius AP und nach dem Obigen auch auf dem durch S gezogenen Meridian ein Punkt liegen, wo $\frac{\partial m}{\partial u} = 0$, also $\frac{m}{\frac{\partial m}{\partial u}}$ unendlich gross

wäre. Dies widerspricht aber ebenfalls der Voraussetzung, dass jeder Theil jenes Meridians kürzeste Verbindung seiner Endpunkte sein soll; der Punkt A ist also wirklich von der ersten Art.

Nun sei $P(x_0, y_0, z_0)$ ein beliebiger Punkt des Hyperboloids, und es sei von ihm aus eine beliebige geodätische Linie gezogen. Bezeichnen wir mit φ den Winkel zwischen den beiden Meridianen, welche von S nach P und nach einem veränderlichen Punkte x, y, z unserer geodätischen Linie gezogen sind, so ist nach den bekannten für geodätische Linien auf Rotationsflächen geltenden Formeln

$$(17.)\qquad \varphi = \nu.\int_{r_0}^{r} \frac{1}{r}.\sqrt{\frac{\beta^2+(\alpha-\beta)r^2}{(r^2-\nu^2).(\beta-r^2).\beta}}\,dr,$$

wobei zur Abkürzung

$$r^2 = y^2+z^2;\quad r_0^2 = y_0^2+z_0^2$$

gesetzt wurde, und wo ν den Radius desjenigen Parallelkreises bedeutet, welchen die betrachtete geodätische Linie berührt. Wenn nun eine unendlich nahe benachbarte von P ausgehende geodätische Linie existirt, welche die vorige schneidet, so müssen die Coordinaten r, φ des Schnittpunktes die Gleichung erfüllen

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = J = \frac{1}{\sqrt{-\beta.(\alpha-\beta)}}.\int_{r_0}^{r}\frac{\beta^2+(\alpha-\beta)r^2}{r^2-\nu^2}.\frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2-\beta)(r^2-\nu^2)\left(r^2+\frac{\beta^2}{\alpha-\beta}\right)}} = 0.$$

Was die Zeichen der hier vorkommenden Wurzeln anbelangt, so wollen wir festsetzen, dass unter der Wurzel aus einer constanten reellen positiven Grösse, wie z. B. $-\beta(\alpha-\beta)$, stets der positive Werth verstanden werden soll. Das Zeichen der variabeln Wurzel unter dem Integral hängt dann von der Art und Weise ab, wie wir den Winkel φ zählen. Um die Vorstellungen zu fixiren, denken wir uns jenen Winkel so gezählt, dass das Zeichen der Wurzel stets mit demjenigen von dr übereinstimmt.

Zur Untersuchung des Integrales J setzen wir zunächst

$$r^2 = \varrho$$

und haben dann

$$J = \frac{1}{2\sqrt{-\beta(\alpha-\beta)}}.\int_{r_0^2}^{r^2}\frac{\beta+(\alpha-\beta)\varrho}{\varrho-\nu^2}.\frac{d\varrho}{\sqrt{(\varrho-\beta)(\varrho-\nu^2)\left(\varrho+\frac{\beta^2}{\alpha-\beta}\right)}}.$$

Weiter setzen wir

$$e_1 = -\tfrac{1}{12}\left(\frac{\alpha\beta-2\beta^2}{\alpha-\beta}-2\nu^2\right);\quad e_2 = -\tfrac{1}{12}\left(\frac{\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}+\nu^2\right);$$
$$e_3 = -\tfrac{1}{12}\left(\frac{-2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}+\nu^2\right)$$

und

$$\varrho = 4(s-e_1)+\nu^2,\quad \text{oder}\quad s = e_1+\tfrac{1}{4}(\varrho-\nu^2).$$

Dann ist

$$e_1 > e_2 > e_3 \quad \text{und} \quad e_1+e_2+e_3 = 0,$$

ferner

$$\varrho-\beta = 4(s-e_3),$$
$$\varrho-\nu^2 = 4(s-e_1),$$
$$\varrho+\frac{\beta}{\alpha-\beta} = 4(s-e_2),$$

und bezeichnen wir zur Abkürzung die Grösse

$$4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$$

durch S, so wird jetzt

$$J = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{-\beta}}\cdot\int_{s_0}^{s_1}\frac{s-e_2}{s-e_1}\cdot\frac{ds}{\sqrt{S}},$$

wobei zur Abkürzung

$$s_0 = e_1+\tfrac{1}{4}(r_0^2-\nu^2);\quad s_1 = e_1+\tfrac{1}{4}(r^2-\nu^2)$$

gesetzt wurde. Wir bezeichnen nun mit $\wp u$ dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$\frac{ds}{du} = \sqrt{S},$$

welches für $u = 0$ unendlich wird, und mit 2ω dessen reelle positive Fundamentalperiode. Wir setzen $s = \wp u$ und nennen u_0 und u_1 die Werthe von u, welche den Werthen s_0 und s_1 entsprechen. Dann wird

$$J = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{-\beta}}\cdot\int_{u_0}^{u_1}\frac{\wp u-e_2}{\wp u-e_1}\cdot du.$$

Nun ist aber

$$\frac{\wp u-e_2}{\wp u-e_1} = 1+\frac{1}{e_1-e_3}\cdot[\wp(u-\omega)-e_1],$$

eine Gleichung, welche man mit Hülfe des Additionstheorems der Function $\wp u$ leicht bestätigen kann. Also wird

$$(18.)\quad J = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{-\beta}}\cdot\frac{1}{e_1-e_3}\cdot\left[-e_3(u_1-u_0)+\frac{\sigma'(u_0-\omega)}{\sigma(u_0-\omega)}-\frac{\sigma'(u_1-\omega)}{\sigma(u_1-\omega)}\right].$$

Da für $u = u_0$ und $u = u_1$ nicht nur die Werthe von $\wp u$, sondern auch die Vorzeichen der Ableitung $\wp' u = \sqrt{S}$ bekannt sind, so sind u_0 und u_1 selbst bis auf ganzzahlige Vielfache der Perioden völlig bestimmt. Da ferner s_0 und s_1 beide grösser als e_1 sind, so giebt es zwei reelle positive zwischen 0 und 2ω gelegene Werthe, welche wir für u_0 und u_1 wählen können, und die wir uns fortan unter diesen Zeichen vorstellen wollen. Aus der Uebereinstimmung der Zeichen von ds und $\sqrt{S}$ ergiebt sich, dass in allen Fällen $u_0 < u_1$ sein muss, gleichgültig, ob die Integrationsvariabele r, ϱ oder s von der unteren Grenze aus zuerst zu- oder abnimmt. In der in Gleichung (18.) vorkommenden Klammer ist daher das erste Glied, $-e_3(u_1 - u_0)$, stets positiv, denn e_3 ist negativ.

Wenn nun u von 0 bis 2ω wächst, so nimmt die Grösse $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ beständig ab, und zwar von $+\infty$ bis $-\infty$. Wenn daher u_0 und u_1 beide $> \omega$ sind, so ist J stets positiv. Aus der Gleichung

$$\frac{\sigma' u}{\sigma u} = -\frac{\sigma'(-u)}{\sigma(-u)}$$

ergiebt sich ferner, dass J auch dann immer positiv ist, wenn u_0 und u_1 beide $< \omega$ sind. J kann also nur verschwinden, wenn $u_0 < \omega$ und $u_1 > \omega$ ist. Dies Resultat hat folgende geometrische Bedeutung:

Unter den von P ausgehenden geodätischen Linien werden nur solche von den unendlich nahe benachbarten geschnitten, welche einen Parallelkreis berühren, dessen Radius kleiner als r_0 ist; nur die dem Scheitel gewissermassen zugewandten Linien können also eine Enveloppe bilden, und zwar berühren sie dieselbe immer erst nach der Berührung mit dem Parallelkreis.

Wenn wir nun sehen wollen, wie der Punkt P liegen muss, damit der von ihm über den Scheitel gezogene Meridian von den unendlich nahe benachbarten geodätischen Linien geschnitten werde, so haben wir $\nu = 0$, also

$$e_1 = -\tfrac{1}{12}\cdot\frac{\alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha - \beta}; \quad e_2 = -\tfrac{1}{12}\cdot\frac{\alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta}; \quad e_3 = -\tfrac{1}{12}\cdot\frac{-2\alpha\beta + \beta^2}{\alpha - \beta}$$

zu setzen, die Functionen $\wp u$ und σu auf diese Constanten zu beziehen und zu untersuchen, für welche Werthe von u_0 und u_1 die in Gleichung (18.) auftretende Klammer

$$L = -e_3(u_1 - u_0) + \frac{\sigma'(u_0 - \omega)}{\sigma(u_0 - \omega)} - \frac{\sigma'(u_1 - \omega)}{\sigma(u_1 - \omega)}$$

verschwindet. Hierbei können wir dem Früheren gemäss u_0 und u_1 resp. auf die Intervalle $0 \ldots \omega$ und $\omega \ldots 2\omega$ beschränken.

Denken wir uns u_0 fest und lassen u_1 von dem Werthe ω an wachsen, so beginnt L mit dem Anfangswerthe $-\infty$ und wächst beständig, denn sein Differentialquotient nach u_1

$$-e_3+\wp(u_1-\omega)$$

ist positiv. Also erwirbt L seinen Maximalwerth für $u_1=2\omega$, und dieser Maximalwerth ist

$$M = -e_3(2\omega-u_0)+\frac{\sigma'(u_0-\omega)}{\sigma(u_0-\omega)}-\eta,$$

wo $\eta=\frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}$ die Hälfte der reellen Fundamentalperiode des Normalintegrals zweiter Gattung $\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}}$ bedeutet. Liegt u_0 nahe bei ω, so hat $\frac{\sigma'(u_0-\omega)}{\sigma(u_0-\omega)}$ einen sehr grossen negativen Werth, und M ist daher ebenfalls negativ. Denkt man sich, dass u_0 abnimmt, so wächst M bis zu dem Werthe

$$M_0 = -e_3.2\omega-2\eta,$$

den es für $u_0=0$ erwirbt. Nun gelten aber, wenn zur Abkürzung $h=e^{\frac{i\pi\omega'}{\omega}}$ gesetzt wird, wo ω' die rein imaginäre Fundamentalperiode von $\wp u$ bezeichnet, die Gleichungen

$$2\eta = \frac{\pi^2}{\omega}\cdot\left[\tfrac{1}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(h^n-h^{-n})^2}\right],$$

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2\cdot(e_1-e_3) = \left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}h^{n^2}\right)^4$$

und

$$\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^2\cdot(e_2-e_3) = 16h.\left(\sum_{n=1}^{\infty}h^{n(n+1)}\right)^4.$$

Indem man die beiden letzten Gleichungen addirt und mit $\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi^2}{2\omega}$ multiplicirt, erhält man

$$-2\omega.e_3 = \frac{\pi^2}{2\omega}\cdot\left\{\tfrac{1}{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}h^{n^2}\right)^4+\tfrac{16}{3}h.\left(\sum_{n=1}^{\infty}h^{n(n+1)}\right)^4\right\}.$$

Daher wird jetzt

$$M_0 = \frac{\pi^2}{2\omega}\cdot\left\{\tfrac{1}{3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}h^{n^2}\right)^4+\tfrac{16}{3}h.\left(\sum_{n=1}^{\infty}h^{n(n+1)}\right)^4-\tfrac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{(h^n-h^{-n})^2}\right\}.$$

Man sieht sofort, dass diese Grösse positiv ist. *Also besitzt die Gleichung*

$$M=-e_3(2\omega-u_0)+\frac{\sigma'(u_0-\omega)}{\sigma(u_0-\omega)}-\eta=0$$

in der That zwischen 0 *und* ω *eine und nur eine reelle Wurzel* $u_0=U$. *Hat man diese gefunden, so liefert die Gleichung*

$$r = \sqrt{\varrho} = 2\sqrt{s - e_1} = 2\sqrt{\wp U + \frac{1}{12} \cdot \frac{\alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha - \beta}}$$

den Radius desjenigen Parallelkreises, welcher die Punkte erster und zweiter Art von einander scheidet.

Die hier gewonnenen Resultate weichen nur in der Ausdrucksweise von denjenigen ab, zu welchen Herr *v. Braunmühl* in seiner oben citirten Dissertation gekommen ist. Für unsere Punkte erster Art liegt eben die *Braunmühl*sche Enveloppe der geodätischen Linien ganz auf derjenigen Schale des Hyperboloids, auf welcher der Ausgangspunkt nicht liegt, während für die Punkte zweiter Art eine Spitze der Enveloppe auf die Schale des Ausgangspunktes übergetreten ist.

IV.

Punkte erster Art auf dem Rotations-Paraboloide.

Für das Rotations-Paraboloid gestaltet sich die Rechnung ähnlich wie oben, nur einfacher, da sie nicht zu elliptischen, sondern nur zu Exponentialfunctionen führt. Gleichwohl wollen wir ihre Hauptmomente hier kurz angeben, um dabei die Irrigkeit einer Behauptung nachzuweisen, welche Herr *A. v. Braunmühl* sowohl in seiner Dissertation pag. 24, als in dem oben citirten Auszug derselben aufstellt. Er giebt dort an, auf dem Rotations-Paraboloide hätten die von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien überhaupt nie eine im Endlichen gelegene Enveloppe und sagt dann (pag. 558): „Hiermit ist dann auch ein Beispiel für die Frage geliefert, welche *Jacobi* l. c. noch offen lässt etc.“ Dieser Ausspruch, der eigentlich schon durch unseren im zweiten Abschnitt bewiesenen allgemeinen Satz widerlegt ist, wird sich auch bei der speciellen Betrachtung des Paraboloids als unzutreffend herausstellen.

Es sei

$$y^2 + z^2 = r^2 = 2px$$

die Gleichung eines beliebigen Rotations-Paraboloids, $P(x_0, y_0, z_0)$ ein Punkt seiner Oberfläche, durch den wir uns eine geodätische Linie gezogen denken, und φ der Winkel, den der nach einem variabeln Punkt dieser Linie gezogene Meridian mit dem durch P gehenden Meridiane bildet. Dann ist, wenn wieder ν den Radius desjenigen Parallelkreises bezeichnet, den die geodätische Linie berührt, und wenn $y_0^2 + z_0^2 = r_0^2$ gesetzt wird,

$$\varphi = \frac{\nu}{p}\cdot\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{r}\cdot\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}}$$

und

$$(1.)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = J = \frac{1}{p}\cdot\int_{r_0}^{r}\frac{r.\sqrt{r^2+p^2}.dr}{(r^2-\nu^2).\sqrt{r^2-\nu^2}},$$

wobei man unter $\sqrt{r^2+p^2}$ den positiven Werth zu verstehen und das Zeichen von $\sqrt{r^2-\nu^2}$ so bestimmt zu denken hat, dass es mit dem von dr übereinstimmt. Offenbar kann $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}$ nur dann verschwinden, wenn die Integrationsvariabele einen Weg durchläuft, auf dem sie erst von r_0 bis gegen ν abnimmt, dann einen Umlauf um den Punkt $r=\nu$ macht, so dass $\sqrt{r^2-\nu^2}$ sein Zeichen wechselt, und dann wieder bis zur oberen Grenze zunimmt. Nun ist das unbestimmte Integral

$$\int\frac{r}{r^2-\nu^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}}\,dr = -\tfrac{1}{2}\log\left[r^2+\tfrac{1}{2}(p^2-\nu^2)-\sqrt{(r^2-\nu^2)(r^2+p^2)}\right]-\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}},$$

wie man durch Differentiation der rechten Seite leicht bestätigt. Da $\sqrt{r^2-\nu^2}$ für die untere Grenze des Integrales J negativ, für die obere positiv ist, so findet man

$$J = \frac{1}{p}\cdot\left\{\tfrac{1}{2}\log\frac{r_0^2+\frac{p^2-\nu^2}{2}+\sqrt{(r_0^2-\nu^2)(r_0^2+p^2)}}{r^2+\frac{p^2-\nu^2}{2}-\sqrt{(r^2-\nu^2)(r^2+p^2)}}-\sqrt{\frac{r_0^2+p^2}{r_0^2-\nu^2}}-\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}}\right\},$$

wo jetzt allen Wurzeln der positive Werth beizulegen ist. —

Indem man aus dem Nenner des Bruches unter dem Logarithmus die Wurzel wegschafft, erhält man

$$(2.)\qquad \left\{\begin{aligned} J = \frac{1}{p}\cdot\Big\{&\tfrac{1}{2}\log\left[r_0^2+\frac{p^2-\nu^2}{2}+\sqrt{(r_0^2-\nu^2)(r_0^2+p^2)}\right]\\ &+\tfrac{1}{2}\log\left[r^2+\frac{p^2-\nu^2}{2}+\sqrt{(r^2-\nu^2)(r^2+p^2)}\right]\\ &-\log\frac{p^2+\nu^2}{2}-\sqrt{\frac{r_0^2+p^2}{r_0^2-\nu^2}}-\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}}\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Dieser Ausdruck lässt sofort erkennen, dass J für einen reellen Werth von r verschwindet. Denn ist r nur wenig grösser als ν, so hat J wegen des letzten Gliedes der Klammer einen sehr grossen negativen Werth. Für $r=\infty$ ist aber auch J wegen des zweiten Gliedes der Klammer positiv unendlich, so dass es vorher durch Null gegangen sein muss. *Die Punkte*

des Rotations-Paraboloids sind also mit alleiniger Ausnahme des Scheitels sämmtlich von der zweiten Art.

Bei dieser Betrachtung war der Werth von ν nur der Beschränkung $0 \leqq \nu < r_0$ unterworfen, sonst aber ganz beliebig. An der Bildung der Enveloppe der von P ausgehenden geodätischen Linien nehmen also alle diejenigen Theil, welche einen Parallelkreis berühren, dessen Radius $< r_0$ ist, und auch nur diese.

Um die Gestalt der Enveloppe zu erkennen, denken wir uns ν als eine unabhängige Variabele und bezeichnen mit R die von ihr abhängige Wurzel der Gleichung $J=0$. Setzen wir ausserdem

$$(3.)\qquad \Phi = \frac{\nu}{p}\cdot\int_{r_0}^{R}\frac{dr}{r}\cdot\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}},$$

so sind $R,\ \Phi$ die geodätischen Polarcoordinaten eines variabeln Punktes auf dem einen, und $R,\ -\Phi$ auf dem anderen Zweige der Enveloppe. Man hat nun

$$\frac{dR}{d\nu} = -\left[\frac{\frac{\partial J}{\partial \nu}}{\frac{\partial J}{\partial r}}\right]_{r=R}$$

und findet aus Gleichung (1.)

$$\frac{\partial J}{\partial r} = \frac{1}{p}\cdot\frac{r}{r^2-\nu^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}}$$

und aus Gleichung (2.)

$$-\frac{\partial J}{\partial \nu} = \frac{\nu}{p}\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{\frac{r_0^2+p^2}{r_0^2-\nu^2}}}{r_0^2+\frac{p^2-\nu^2}{2}+\sqrt{(r_0^2-\nu^2).(r_0^2+p^2)}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}}}{r^2+\frac{p^2-\nu^2}{2}+\sqrt{(r^2-\nu^2).(r^2+p^2)}}\right.$$
$$\left.+\frac{2}{p^2+\nu^2}+\frac{1}{r_0^2-\nu^2}\cdot\sqrt{\frac{r_0^2+p^2}{r_0^2-\nu^2}}+\frac{1}{r^2-\nu^2}\cdot\sqrt{\frac{r^2+p^2}{r^2-\nu^2}}\right\}.$$

Ferner ist

$$\frac{d\Phi}{d\nu} = \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}+\frac{\partial\Phi}{\partial R}\cdot\frac{dR}{d\nu} = \frac{\partial\Phi}{\partial R}\cdot\frac{dR}{d\nu} = \frac{\nu}{p}\cdot\frac{1}{R}\cdot\sqrt{\frac{R^2+p^2}{R^2-\nu^2}}\cdot\frac{dR}{d\nu},$$

da R ja so bestimmt ist, dass $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$ verschwindet.

Aus diesen Formeln ergeben sich leicht folgende Resultate: Wenn ν von 0 bis r_0 wächst, so nimmt R von einem gewissen Anfangswerth ausgehend beständig zu und wird für $\nu = r_0$ unendlich gross; denn $\frac{dR}{d\nu}$ ist mit

alleiniger Ausnahme der Stelle $\nu = 0$, wo es verschwindet, beständig positiv und wird für $\nu = r_0$ von höherer als der ersten Ordnung unendlich. — Gleichzeitig wächst auch Φ von dem Anfangswerthe π ausgehend fortwährend, und zwar ebenfalls über alle Grenzen, denn das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (3.) wird mit seiner oberen Grenze logarithmisch unendlich.

Die Enveloppe besteht also aus zwei Zweigen, welche sich in einem Punkt des von P über den Scheitel gezogenen Meridians zu einer Spitze an einander schmiegen und von hier nach dem Unendlichen gehend das Paraboloid in unzählig vielen schraubenartigen Windungen umgeben. Die beiden Zweige schneiden sich in unzählig vielen auf dem Meridian gelegenen Punkten und nähern sich asymptotisch den beiden Aesten derjenigen geodätischen Linie, welche den durch P gehenden Parallelkreis in P berührt.

Es ist leicht einzusehen, wie die von Herrn *v. Braunmühl* untersuchte Enveloppe der geodätischen Linien auf dem verlängerten Rotations-Ellipsoid bei stetiger Ueberführung dieses letzteren in ein Paraboloid allmälig in eine Curve von der eben geschilderten Gestalt übergeht. Man hat hierzu nur nöthig, den Coordinatenanfang in den einen Pol des Ellipsoids zu verlegen, so dass die Gleichung der Fläche in der Form

$$\left(\frac{ac+y}{ac}\right)^2+\frac{r^2}{a^2} = 1,$$

oder

$$\frac{y^2}{c^2}+r^2+2y\cdot\frac{a}{c} = 0,$$

oder auch

$$y = -ac+c.\sqrt{a^2-r^2}$$

erscheint, die *Braunmühl*schen Formeln für φ und J zu bilden, und dann a und c gleichzeitig unendlich werden zu lassen, während ihr Verhältniss einen constanten endlichen Werth p behält.

Man nehme den Ausgangspunkt A_0 der geodätischen Linien auf der nördlichen Hälfte des Ellipsoids an und bezeichne mit A_1 die nördlichere, mit A_3 die südlichere der beiden auf dem Meridian gelegenen Spitzen der Enveloppe. Ferner seien A_2 und A_4 die beiden Spitzen, in welchen die nach Westen, resp. Osten gerichteten Zweige der Enveloppe zusammentreffen. Auf diese fünf Punkte mögen resp. die Indices 0, 1, 2, 3, 4 bezogen werden. Hält man nun bei der Verlängerung des Ellipsoides r_0 fest, so nähert sich

r_1 einer endlichen Grenze, so dass die Spitze A_1, auch wenn sie anfänglich südlich vom Aequator lag, auf die nördliche Hälfte des Ellipsoides übertritt.

Die Spitzen A_2 und A_4 bleiben stets auf dem zu dem Kreise r_0 symmetrischen Parallelkreis r_0' der südlichen Hälfte, wie Herr *v. Braunmühl* richtig bemerkt*). Ihr Längenunterschied $\varphi_4 - \varphi_2$ wächst beständig, und zwar über die Grenze 2π, ja über jede Grenze hinaus, so dass diese Spitzen fortwährend in entgegengesetztem Sinne um das Ellipsoid herumlaufen, nach jedem halben Umlauf einander begegnend. Die beiden nördlichen Aeste der Enveloppe umgeben also das Ellipsoid in Schraubenwindungen, deren Anzahl sich mehr und mehr vergrössert und zuletzt unendlich wird, während die beiden südlichen Aeste nebst den Spitzen A_2, A_3, A_4 im Unendlichen verloren gehen.

Ganz ähnlich sind natürlich die Veränderungen, welche die Enveloppe der von einem Punkt ausgehenden geodätischen Linien auf dem zweischaligen Hyperboloid erleidet, wenn dieses in ein Paraboloid übergeführt wird.

V.

Punkte erster Art auf dem dreiaxigen Hyperboloide.

Lässt man das zweischalige Rotations-Hyperboloid durch Verkleinerung der einen imaginären Axe in ein dreiaxiges Hyperboloid übergehen, so entfernen sich die beiden Nabelpunkte, welche ursprünglich mit dem Scheitel zusammenfielen, allmälig mehr und mehr von diesem. Der Parallel-

---

*) Der pag. 44 der Dissertation am Schluss des ersten Abschnittes hierfür gegebene Beweis ist deswegen nicht befriedigend, weil die beiden Theile, in die das Integral J zerlegt wird, wenn sie überhaupt einen Sinn hätten, sich addiren und nicht sich zerstören müssten. Ein richtiger Beweis lässt sich indessen für das verlängerte Rotationsellipsoid durch folgenden einfachen Grenzübergang führen: Man setze ν nicht genau $= r_0$, sondern etwas kleiner und betrachte denjenigen Zweig der entsprechenden von A_0 ausgehenden geodätischen Linie, welcher anfänglich auf der südlichen Seite des Parallelkreises r_0 verläuft. Dieser schneidet den Aequator und den Kreis r_0' und berührt dann den südlichen Parallelkreis ν in einem Punkte B, um von da wieder nach Norden aufzusteigen und r_0' in einem zweiten Punkte C zu schneiden. Dieser letzte Theil von B bis C muss nothwendig den Berührungspunkt D des betrachteten Zweiges mit der Enveloppe enthalten; denn das Integral J springt bei B von $+\infty$ auf $-\infty$ über, ist aber in C bereits wieder positiv. Wenn sich nun ν dem Werthe r_0 unbegrenzt nähert, so fallen die Punkte B, C, D sämmtlich mit demjenigen Punkte zusammen, in welchem die für $\nu = r_0$ resultirende geodätische Linie den Parallelkreis r_0' berührt. — Aehnlich gestaltet sich der Beweis für das abgeplattete Rotationsellipsoid. Nur hat man hier den anfänglich nach Norden gerichteten Zweig der geodätischen Linie ins Auge zu fassen.

kreis, welcher den Bereich der Punkte erster Art begrenzt, geht dabei in eine Curve über, die anfänglich den Scheitel und beide Nabelpunkte umschliesst, später aber in zwei getrennte Stücke zerfällt, welche nur noch die letzteren umgeben. Um dies zu beweisen, zeigen wir:

Erstens, ***dass die Nabelpunkte bei jedem Axenverhältniss Punkte erster Art bleiben.***

Zweitens, ***dass man den Scheitel durch hinreichende Fortsetzung der angegebenen Deformation zu einem Punkte zweiter Art machen kann.***

Es sei

$$\frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma} = 1,$$

wo $\alpha > 0 > \beta > \gamma$ ist, die Gleichung eines zweischaligen Hyperboloids, und es seien λ_1 und λ_2 die beiden elliptischen Coordinaten des Punktes x, y, z, d. h. diejenigen beiden Grössen, welche noch ausser dem Werthe $\lambda = 0$ die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha-\lambda}+\frac{y^2}{\beta-\lambda}+\frac{z^2}{\gamma-\lambda} = 1$$

erfüllen, und zwar sei $\lambda_1 > \lambda_2$. Dann ist bekanntlich

$$\beta \geqq \lambda_1 \geqq \gamma \geqq \lambda_2.$$

Denkt man sich nun auf der Fläche eine beliebige geodätische Linie gezogen, so können die Coordinaten λ_1, λ_2 eines variabeln Punktes derselben so als Functionen einer Veränderlichen u dargestellt werden, dass zwei Differentialgleichungen von der Form

$$du = \frac{d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}}+\frac{d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}},$$

$$0 = \frac{\lambda_1\, d\lambda_1}{2\sqrt{R(\lambda_1)}}+\frac{\lambda_2\, d\lambda_2}{2\sqrt{R(\lambda_2)}}$$

bestehen, wobei

$$R(\lambda) = -\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\lambda-\delta)$$

gesetzt wurde, und δ eine zwischen β und $-\infty$ gelegene Constante bedeutet *). Die geometrische Bedeutung der Grösse δ ist die, dass die Gleichung $\lambda_1 = \delta$, resp. $\lambda_2 = \delta$ diejenige Krümmungslinie darstellt, welche von der betrachteten geodätischen Linie berührt wird. Nehmen wir nun einen der Nabelpunkte zum Ausgang unserer geodätischen Linie, so haben wir $\delta = \gamma$ zu setzen. Unsere Differentialgleichungen gehen daher, wenn wir

*) *Weierstrass* „Ueber die geodätischen Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid", Monatsberichte der Kgl. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1861, pag. 986 f.

$$\Re(\lambda) = -\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)$$

setzen, in die folgenden über:

$$du = \frac{d\lambda_1}{2(\lambda_1-\gamma).\sqrt{\Re(\lambda_1)}}+\frac{d\lambda_2}{2(\lambda_2-\gamma).\sqrt{\Re(\lambda_2)}},$$

$$0 = \frac{\lambda_1\, d\lambda_1}{2(\lambda_1-\gamma).\sqrt{\Re(\lambda_1)}}+\frac{\lambda_2\, d\lambda_2}{2(\lambda_2-\gamma).\sqrt{\Re(\lambda_2)}};$$

und, wenn wir festsetzen, dass der Nabelpunkt selbst dem Werthe $u=0$ entsprechen soll, so treten hierzu noch die Anfangsbedingungen $\lambda_1=\lambda_2=\gamma$ für $u=0$. Was die Zeichen der Wurzeln anbelangt, so haben λ_1 und λ_2 in der zweiten unserer Differentialgleichungen für kleine Werthe von u gleiche, aber sowohl $d\lambda_1$ und $d\lambda_2$, als $\lambda_1-\gamma$ und $\lambda_2-\gamma$ verschiedene Vorzeichen, so dass diese Gleichung nur dann richtig sein kann, wenn man den beiden Wurzeln entgegengesetzte Zeichen giebt. Wir wollen, was uns ja frei steht, festsetzen, dass $\sqrt{\Re(\lambda_1)}$ anfänglich den negativen, $\sqrt{\Re(\lambda_2)}$ den positiven Werth bedeuten soll.

Um nun unsere Differentialgleichungen durch elliptische Functionen zu integriren, setzen wir

$$e_1 = \frac{\alpha-2\beta}{12}; \quad e_2=\frac{\alpha+\beta}{12}; \quad e_3=\frac{\beta-2\alpha}{12}$$

und, indem wir mit ν einen Index bezeichnen, der nach einander die Werthe 1 und 2 annimmt,

$$\lambda_\nu=-4(s_\nu-e_2), \quad \text{oder} \quad s_\nu=-\tfrac{1}{4}\lambda_\nu+e_2$$

und

$$S_\nu = 4(s_\nu-e_1)(s_\nu-e_2)(s_\nu-e_3).$$

Dann wird

$$\Re(\lambda_\nu)=16S_\nu; \quad \lambda_\nu-\gamma=-4(s_\nu-e_2+\tfrac{1}{4}\gamma); \quad d\lambda_\nu=-4\,ds_\nu,$$

und unsere Differentialgleichungen gehen in folgende über:

$$du = \frac{ds_1}{2(s_1-e_2+\frac{1}{4}\gamma)\sqrt{S_1}}+\frac{ds_2}{2(s_2-e_2+\frac{1}{4}\gamma)\sqrt{S_2}},$$

$$0 = \frac{(s_1-e_2)\,ds_1}{2(s_1-e_2+\frac{1}{4}\gamma)\sqrt{S_1}}+\frac{(s_2-e_2)\,ds_2}{2(s_2-e_2+\frac{1}{4}\gamma)\sqrt{S_2}}.$$

Wir multipliciren nun die erste Gleichung mit $\frac{1}{4}\gamma$, addiren die zweite dazu und setzen zur Abkürzung $v=\frac{1}{2}\gamma.u$. Dann kommt

$$dv = \frac{ds_1}{\sqrt{S_1}}+\frac{ds_2}{\sqrt{S_2}},$$

$$0 = \frac{(s_1-e_2)\,ds_1}{(s_1-e_2+\frac{1}{4}\gamma)\sqrt{S_1}}+\frac{(s_2-e_2)\,ds_2}{(s_2-e_2+\frac{1}{4}\gamma)\sqrt{S_2}}.$$

Nun sei wieder $\wp u$ dasjenige Integral der Differentialgleichung

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = 4(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3),$$

welches für $u=0$ unendlich wird, und 2ω seine reelle positive Fundamentalperiode. Bezeichnen wir dann mit w denjenigen zwischen 0 und ω gelegenen Werth, welcher die Gleichung

$$\wp w = e_2 - \tfrac{1}{4}\gamma$$

erfüllt, und setzen

$$s_1 = \wp(w+u_1); \quad s_2 = \wp(-w+u_2),$$

so nehmen unsere Differentialgleichungen die Gestalt an

$$dv = du_1 + du_2,$$

$$0 = du_1 + du_2 - \tfrac{1}{4}\gamma \cdot \left(\frac{du_1}{\wp(w+u_1)-\wp w} + \frac{du_2}{\wp(-w+u_2)-\wp w}\right),$$

und an Stelle der früheren Anfangsbedingungen treten jetzt die neuen $u_1 = u_2 = 0$ für $v=0$. Nun ist

$$\frac{1}{\wp(w+u_1)-\wp w} = -\frac{1}{\wp' w} \cdot \left[\frac{\sigma'(u_1+2w)}{\sigma(u_1+2w)} - \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} - 2\frac{\sigma' w}{\sigma w}\right],$$

$$\frac{1}{\wp(-w+u_2)-\wp w} = \frac{1}{\wp' w} \cdot \left[\frac{\sigma'(u_2-2w)}{\sigma(u_2-2w)} - \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2} + 2\frac{\sigma' w}{\sigma w}\right].$$

Also wird

$$dv = du_1 + du_2,$$

$$0 = dv - \frac{\gamma}{4\wp' w} \cdot \left[-\frac{\sigma'(u_1+2w)}{\sigma(u_1+2w)} du_1 + \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} du_1 + \frac{\sigma'(u_2-2w)}{\sigma(u_2-2w)} du_2 - \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2} du_2 + 2\frac{\sigma' w}{\sigma w} dv\right].$$

Diese Gleichungen lassen sich aber unmittelbar integriren. Man erhält

$$v = u_1 + u_2,$$

$$h = v \cdot \left(1 - \frac{\gamma}{2\wp' w} \cdot \frac{\sigma' w}{\sigma w}\right) - \frac{\gamma}{4\wp' w} \log \frac{\sigma u_1 \cdot \sigma(u_2-2w)}{\sigma u_2 \cdot \sigma(u_1+2w)},$$

wo h eine Constante bedeutet. Hieraus folgt nun sofort die Richtigkeit der ersten unserer oben aufgestellten Behauptungen, ohne dass wir nöthig hätten, u_1 und u_2 explicite als Functionen von v darzustellen. Zwei verschiedene von demselben Nabelpunkt ausgehende geodätische Linien, welche auf der gleichen Seite der XY-Ebene liegen, entsprechen nämlich zwei verschiedenen Werthen h_1 und h_2 der Constanten h. Wenn sie noch einen zweiten Durchschnittspunkt besässen mit den Coordinaten λ_1, λ_2, so würde zu dem Werthe-

paar λ_1, λ_2 nur ein Werthepaar s_1, s_2 und auch nur ein Werthsystem u_1 u_2, also auch nur ein Werth von v gehören, und dann müsste $h_1 = h_2$ sein, gegen die Voraussetzung. Zum Beweise der zweiten Behauptung betrachten wir den Schnitt unseres Hyperboloids mit der XZ-Ebene. Derselbe ist gleichzeitig eine geodätische und eine Krümmungslinie, und zwar ist seine Gleichung $\lambda_1 = \beta$. Aus den allgemeinen Formeln

$$x^2 = \frac{\alpha(\alpha-\lambda_1)(\alpha-\lambda_2)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}; \quad y^2 = \frac{\beta(\beta-\lambda_1)(\beta-\lambda_2)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}; \quad z^2 = \frac{\gamma(\gamma-\lambda_1)(\gamma-\lambda_2)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)},$$

welche den Uebergang von den elliptischen zu den rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes vermitteln, ergiebt sich für den betrachteten Schnitt

$$x^2 = \frac{\alpha}{\alpha-\gamma}(\alpha-\lambda_2); \quad y^2 = 0; \quad z^2 = \frac{\gamma}{\gamma-\alpha}(\gamma-\lambda_2);$$

$$x\,dx = -\frac{\alpha\, d\lambda_2}{2(\alpha-\gamma)}; \quad z\,dz = -\frac{\gamma\, d\lambda_2}{2(\gamma-\alpha)}.$$

Und, wenn wir mit s die vom Scheitel an gerechnete Bogenlänge bezeichnen, so findet sich nach einfachen Rechnungen

$$ds = \frac{\lambda_2\, d\lambda_2}{2\sqrt{-\lambda_2(\lambda_2-\alpha)(\lambda_2-\gamma)}},$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist. Durch diese Gleichung und die Anfangsbedingung $\lambda_2 = \gamma$ für $s = 0$ wird λ_2 als Function von s definirt. Da β hier gar nicht vorkommt, *so ist λ_2 für alle Werthe von β immer die gleiche Function der Variabeln s und der Constanten α, γ.* Wir bemerken endlich, dass λ_2 mit wachsendem s fortwährend abnimmt.

Für das Krümmungsmass k im Punkte λ_1, λ_2 hat man den Ausdruck

$$k = \frac{\alpha\beta\gamma}{\lambda_1^2\lambda_2^2},$$

und daher ist für die Punkte der Curve $\lambda_1 = \beta$

$$k = \frac{\alpha\gamma}{\beta}\cdot\frac{1}{\lambda_2^2}.$$

Die reducirte Länge m des Bogens s erfüllt also die Differentialgleichung

$$\frac{d^2m}{ds^2} + \frac{\alpha\gamma}{\beta}\cdot\frac{1}{\lambda_2^2}\cdot m = 0$$

und die Anfangsbedingungen $m = 0$, $\frac{dm}{ds} = 1$ für $s = 0$. Wir bezeichnen jetzt mit a eine beliebige reelle positive Constante und vergleichen die vorstehende Differentialgleichung mit der anderen

$$\frac{d^2\overline{m}}{ds^2} + a^2\overline{m} = 0,$$

zu der wir die gleichen Anfangsbedingungen hinzufügen. Man bestätigt leicht, dass diese letztere Gleichung nebst ihren Anfangsbedingungen durch die Function

$$\bar{m} = \frac{1}{a}\sin(as)$$

erfüllt wird, für welche der Quotient $\frac{\bar{m}}{\frac{d\bar{m}}{ds}} = \frac{1}{a}\tan(as)$ unendlich gross wird, und zwar zum ersten Mal im Punkte $s = \frac{\pi}{2a}$. Da man es nun durch hinlängliche Verkleinerung des absoluten Werthes von β dahin bringen kann, dass die Grösse $k = \frac{\alpha\gamma}{\beta\lambda_2^2}$ innerhalb des ganzen Intervalles $0 \cdots \frac{\pi}{2a}$ grösser bleibt als a^2 — dies ist z. B. sicher der Fall, wenn man β so bestimmt, dass $\frac{\alpha\gamma}{\beta b^2} > a^2$ ist, wo b den Werth von λ_2 für $s = \frac{\pi}{2a}$ bezeichnet — so wird dann nach dem im III. Abschnitt bewiesenen Satze auch $\frac{m}{\frac{dm}{ds}}$ für einen Werth von s unendlich, der $\leqq \frac{\pi}{2a}$ ist, d. h. die vom Scheitel ausgehende geodätische Linie $\lambda_1 = \beta$ wird von den benachbarten geschnitten und hört also auf, kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte zu sein.

Auf dem *elliptischen Paraboloide* können die Differentialgleichungen einer geodätischen Linie bekanntlich im Allgemeinen durch elliptische Functionen, und wenn die betrachtete Linie durch einen der Nabelpunkte hindurchgeht, durch Exponentialfunctionen integrirt werden. Durch eine Rechnung, welche der für das Hyperboloid durchgeführten ganz analog ist, erweisen sich die Nabelpunkte auch hier als Punkte erster Art. Dagegen sind alle anderen Punkte von der zweiten Art.

Wenn also das Rotations-Paraboloid in ein elliptisches übergeht, so wird der Scheitel auch in Hinsicht der Beziehungen, die wir hier im Auge haben, durch die beiden Nabelpunkte ersetzt.

Dresden, im September 1880.

Sur quelques points de la théorie des fonctions.

(Extrait d'une lettre de M. *Hermite* à M. *Mittag-Leffler*).

L'importante proposition à laquelle est attaché désormais votre nom dans la théorie générale des fonctions, a fait le sujet d'un travail de M. *Weierstrass*, publié dans le n°. d'Août 1880 des Monatsberichte, et dont j'ai fait l'étude avec le plus vif intérêt. L'illustre géomètre, qui est parvenu par une voie simple et rapide à démontrer votre théorème, l'énonce comme il suit.

Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... une suite indéfinie de fonctions rationnelles, telles que $f_\nu(x)$ ne devienne infinie que pour $x = a_\nu$; et supposons que, les modules des termes de la suite indéfinie a_1, a_2, ... allant en croissant, on ait la condition: limite $a_\nu = \infty$ pour ν infini. On peut alors toujours former une fonction analytique uniforme $\mathfrak{F}(x)$, avec le seul point singulier ∞, n'ayant d'autres pôles que a_1, a_2, etc., et telle que la différence $\mathfrak{F}(x) - f_\nu(x)$ soit finie pour $x = a_\nu$.

En réfléchissant à la méthode donnée par M. *Weierstrass*, j'ai été conduit à suivre une marche un peu différente, et à quelques remarques que je vais vous communiquer succinctement. J'ai considéré d'abord la dérivée logarithmique d'une fonction $\Phi(x)$, holomorphe dans tout le plan, de sorte que les fonctions rationnelles $f_1(x)$, $f_2(x)$, etc. soient simplement:

$$\frac{1}{x-a_1}, \frac{1}{x-a_2}, \text{ etc.}$$

Deux hypothèses m'ont paru devoir être faites. Je supposerai dans la première qu'en retranchant de $\frac{1}{a_\nu - x}$ un polynôme $P_\nu(x)$ dont le degré a une limite supérieure finie et indépendante de ν, que je représenterai par $n-1$, et posant

$$F_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu - x} - P_\nu(x),$$

la somme

$$\mathfrak{F}(x) = F_1(x) + F_2(x) + \cdots$$

remplisse les conditions de l'énoncé. Dans la seconde, j'admets au contraire qu'il soit nécessaire que le degré des polynômes $P_\nu(x)$ augmente au-delà de toute limite. Ceci posé, vous voyez en premier lieu qu'à l'égard de la dérivée d'ordre n, $D_x^n \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}$, les polynômes entiers $P_\nu(x)$ disparaissant, on est amené à la série $\Sigma \frac{1}{(a_\nu - x)^{n+1}}$, qui par conséquent doit être convergente. De cette observation fort simple découle la remarque suivante. Admettons que pour une certaine valeur du nombre entier n, la série:

$$\frac{1}{\text{Mod}\, a_1^{n+1}} + \frac{1}{\text{Mod}\, a_2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\text{Mod}\, a_\nu^{n+1}} + \cdots$$

remplisse cette condition, et posons

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{a_\nu^n}.$$

On aura:

$$\frac{1}{a_\nu - x} - P_\nu(x) = \frac{x^n}{a_\nu^n (a_\nu - x)}$$

et par conséquent:

$$\mathfrak{F}(x) = \Sigma \frac{x^n}{a_\nu^n (a_\nu - x)}.$$

Or en exceptant seulement les pôles, je dis que cette fonction sera finie, pour toute valeur de la variable. Ecrivons en effet:

$$\mathfrak{F}(x) = x^n \Sigma \frac{1}{a_\nu^{n+1}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)}.$$

et considérons la série formée avec les modules de tous les termes, à savoir:

$$\Sigma \frac{1}{\text{Mod}\, a_\nu^{n+1} \text{Mod}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)}.$$

A partir d'une certaine valeur de ν, telle que le module de $\frac{x}{a_\nu}$ soit inférieur à l'unité, on aura indéfiniment:

$$\text{Mod}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right) > 1 - \text{Mod}\frac{x}{a_\nu} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\text{Mod}\left(1 - \frac{x}{a_\nu}\right)} < \frac{1}{1 - \text{Mod}\frac{x}{a_\nu}},$$

de sorte que les termes sont ceux de la série convergente $\Sigma \frac{1}{\operatorname{Mod} a_\nu^{n+1}}$ multipliés par des facteurs dont le maximum peut être rendu aussi voisin qu'on le voudra de l'unité, à partir d'une certaine valeur de ν. Ayant ainsi démontré que $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction analytique avec l'infini pour seul point singulier, je m'arrête un moment aux séries divergentes à termes positifs Σu_ν, qu'on transforme en séries convergentes en élevant ces termes à une même puissance. Supposant comme le demande la règle de *Gauss* l'expression rationnelle:

$$\frac{u_{\nu+1}}{u_\nu} = \frac{\nu^\lambda + a\nu^{\lambda-1} + \cdots}{\nu^\lambda + a'\nu^{\lambda-1} + \cdots},$$

admettons que $a' - a$ soit positif et non supérieur à l'unité. La série sera divergente, mais ayant:

$$\frac{u_{\nu+1}^n}{u_\nu^n} = \frac{\nu^{n\lambda} + na\,\nu^{n\lambda-1} + \cdots}{\nu^{n\lambda} + na'\nu^{n\lambda-1} + \cdots},$$

on voit qu'il suffit de déterminer n par la condition: $n(a'-a) > 1$, pour que la transformée Σu_ν^n soit certainement convergente. Il est cependant des cas où, si grand que soit n, Σu_ν^n a toujours une somme infinie. Soit en effet, $u_\nu = \frac{1}{\log \nu}$, et prenons la somme à partir de $\nu = 2$. La fonction $\frac{1}{(\log x)^n}$ étant continuellement décroissante avec la variable, nous emploierons la règle de *Cauchy* qui consiste à reconnaître si l'intégrale $\int_2^\infty \frac{dx}{(\log x)^n}$ est finie ou non. Or elle devient $\int_{\log 2}^\infty \frac{e^t\,dt}{t^n}$, si l'on fait: $\log x = t$; sous cette nouvelle forme on reconnaît immédiatement qu'elle est infinie, et nous en concluons que quel que soit n, la série

$$\frac{1}{(\log 2)^n} + \frac{1}{(\log 3)^n} + \cdots + \frac{1}{(\log \nu)^n} + \cdots$$

est divergente. Nous justifions ainsi l'hypothèse admise et qui est maintenant à considérer, où le degré du polynôme $P_\nu(x)$ doit croître indéfiniment avec le nombre ν.

Soit alors:

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{\nu-1}}{a_\nu^\nu},$$

on aura:

$$F_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu - x} - P_\nu(x) = \frac{x^\nu}{a_\nu^\nu(a_\nu - x)}$$

et par conséquent:

$$\mathfrak{F}(x) = \frac{x}{a_1(a_1-x)} + \frac{x^2}{a_2^2(a_2-x)} + \cdots + \frac{x^\nu}{a_\nu^\nu(a_\nu-x)} + \cdots$$

Or une telle série établit l'existence d'une fonction analytique, car à l'exception des pôles, elle est convergente pour toute valeur de la variable. En effet, la racine de degré ν du terme de rang ν, est la quantité: $\dfrac{x}{a_\nu(a_\nu-x)^{\frac{1}{\nu}}}$ dont le module a pour limite zéro, lorsqu'on suppose ν infini. Votre théorème ainsi démontré dans ce cas de la dérivée logarithmique d'une fonction holomorphe conduit à la décomposition en facteurs primaires de ces fonctions holomorphes dont la découverte est due à M. *Weierstrass*. En effet, l'expression:

$$\mathfrak{F}(x) + \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)},$$

n'ayant plus de pôles, est dans tout le plan une fonction holomorphe, qu'on peut représenter par $G'(x)$; et de la relation

$$\mathfrak{F}(x) + \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = G'(x)$$

je conclus, en faisant $\mathfrak{P}_k(x) = \int_0^x P_k(x)\,dx$, la formule

$$\Phi(x) = e^{G(x)}\left[\left(1-\frac{x}{a_1}\right)e^{\mathfrak{P}_1(x)}\right]$$
$$\left[\left(1-\frac{x}{a_2}\right)e^{\mathfrak{P}_2(x)}\right]$$
$$\cdots\cdots$$
$$\left[\left(1-\frac{x}{a_\nu}\right)e^{\mathfrak{P}_\nu(x)}\right]$$
$$\cdots\cdots$$

J'aborde maintenant les fonctions uniformes non holomorphes dont les résidus sont des constantes quelconques; et je supposerai d'abord que les infinis soient tous simples, de sorte que les fractions rationnelles $f_1(x)$, $f_2(x)$, etc. seront: $\dfrac{R_1}{a_1-x}$, $\dfrac{R_2}{a_2-x}$, etc. Comme précédemment je pose une première hypothèse en admettant que pour une certaine valeur du nombre entier n, la série:

$$\text{Mod}\,\frac{R_1}{a_1^{n+1}} + \text{Mod}\,\frac{R_2}{a_2^{n+1}} + \cdots + \text{Mod}\,\frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}} + \cdots$$

soit convergente. Faisant alors:

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu} + \frac{x}{a_\nu^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{a_\nu^n},$$

puis:

$$\mathfrak{F}(x) = \Sigma R_\nu \left[\frac{1}{a_\nu - x} - P_\nu(x)\right]$$

ou encore:

$$\mathfrak{F}(x) = \Sigma \frac{R_\nu x^n}{a_\nu^n (a_\nu - x)}$$

$$= x^n \Sigma \frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}\left(1 - \dfrac{x}{a_\nu}\right)},$$

il suffit de comparer les deux séries

$$\Sigma \mathrm{Mod} \frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}}$$

$$\Sigma \mathrm{Mod} \frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}} \cdot \mathrm{Mod} \frac{1}{1 - \dfrac{x}{a_\nu}}$$

pour reconnaître comme précédemment que la convergence de la première entraîne celle de la seconde. Nous établissons ainsi l'existence de la fonction analytique $\mathfrak{F}(x)$ et j'ajoute qu'on doit aussi regarder comme entièrement démontrée, l'existence de ses dérivées des divers ordres, attendu qu'elles sont données par des séries convergentes pour toute valeur de la variable. Désignant donc par $\mathfrak{F}_i(x)$, ce que devient $\mathfrak{F}(x)$, si l'on remplace les constantes R_ν par R_ν^i, et admettant la convergence des suites:

$$\Sigma \mathrm{Mod} \frac{R_\nu^i}{a_\nu^{n+1}}$$

on aura successivement:

$$\Sigma R_\nu^1 \left[\frac{1}{(a_\nu - x)^2} - P'_\nu(x)\right] = \mathfrak{F}'_1(x),$$

$$\Sigma R_\nu^2 \left[\frac{1}{(a_\nu - x)^3} - \tfrac{1}{2} P''_\nu(x)\right] = \mathfrak{F}''_2(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nous en tirons, en faisant pour abréger

$$\mathfrak{P}_\nu(x) = R_\nu P_\nu(x) + R_\nu^1 P'_\nu(x) + \tfrac{1}{2} R_\nu^2 P''_\nu(x) + \cdots$$

la relation suivante, où je suppose expressément que le nombre des fractions simples n'augmente pas indéfiniment avec ν, restriction que n'exige pas votre méthode ni celle de M. *Weierstrass*, à savoir:

$$\Sigma\left[\frac{R_\nu}{a_\nu-x}+\frac{R'_\nu}{(a_\nu-x)^2}+\frac{R''_\nu}{(a_\nu-x)^3}+\cdots-\mathfrak{P}_\nu(x)\right]$$
$$=\mathfrak{F}(x)+\mathfrak{F}'_1(x)+\tfrac{1}{2}\mathfrak{F}''_2(x)+\cdots$$

Le second membre donne comme on voit une fonction analytique telle que si on en retranche la somme

$$\frac{R_\nu}{a_\nu-x}+\frac{R'_\nu}{(a_\nu-x)^2}+\frac{R''_\nu}{(a_\nu-x)^3}+\cdots$$

c'est-à-dire la fraction rationnelle la plus générale qui ait la quantité a_ν pour seul pôle, la différence cessera d'être infinie pour $x=a_\nu$.

C'est à ce même résultat que je dois maintenant parvenir en me plaçant dans la seconde hypothèse, où les diverses séries: $\Sigma\,\mathrm{Mod}\,\frac{R_\nu}{a_\nu^{n+1}}$ sont divergentes pour toute valeur de n. J'admettrai en premier lieu que les infinis soient tous simples de sorte qu'on ait $f_\nu(x)=\frac{R_\nu}{a_\nu-x}$; en faisant alors de la manière la plus générale:

$$P_\nu(x) = \frac{1}{a_\nu}+\frac{x}{a_\nu^2}+\cdots+\frac{x^{\omega_\nu-1}}{a_\nu^{\omega_\nu}},$$

la question est de déterminer les nombres entiers ω_ν par la condition que la série:

$$\Sigma R_\nu\left[\frac{1}{a_\nu-x}-P_\nu(x)\right] = \Sigma\frac{R_\nu x^{\omega_\nu}}{a_\nu^{\omega_\nu}(a_\nu-x)}$$

soit convergente dans tout le plan. Soit à cet effet:

$$\mathrm{Mod}\,R_\nu = [\mathrm{Mod}\,a_\nu]^{\varrho_\nu};$$

nous ferons deux parts de cette série, en réunissant dans la première les termes où ϱ_ν est négatif ou nul, la seconde comprenant les termes où ϱ_ν est positif. Considérons les modules des termes et pour ne pas multiplier les notations, représentons-les ainsi:

$$\Sigma\frac{(\mathrm{Mod}\,x)^{\omega_\nu}}{(\mathrm{Mod}\,a_\nu)^{\omega_\nu+\varrho_\nu}\,\mathrm{Mod}(a_\nu-x)} \quad \text{et:} \quad \Sigma\frac{(\mathrm{Mod}\,x)^{\omega_\nu}}{(\mathrm{Mod}\,a_\nu)^{\omega_\nu-\varrho_\nu}\,\mathrm{Mod}(a_\nu-x)}$$

en admettant, ce qui est le seul cas à envisager, qu'elles aient une infinité de termes.

Cela posé, on voit immédiatement à l'égard de la première, qu'on la rend convergente si l'on prend pour ω_ν un entier positif, tel que $\omega_\nu+\varrho_\nu$ ne soit pas moindre que ν, et j'observe à cette occasion, que la propriété de la série $\Sigma\frac{x^\nu}{a_\nu^\nu(a_\nu-x)}$ dont je fais usage, a été déjà signalée par M. *Weierstrass* au commencement de son mémoire sur les fonctions analytiques uniformes d'une variable.

Passant à la seconde, je pose

$$\text{Mod}\, a_\nu = (\text{Mod}\, a_{\nu-1})^\alpha$$

de sorte que l'exposant α soit supérieur à l'unité. Le module du terme général devenant ainsi:

$$\frac{(\text{Mod}\, x)^{\omega_\nu}}{(\text{Mod}\, a_{\nu-1})^{\alpha(\omega_\nu - \varrho_\nu)}\, \text{Mod}\,(a_\nu - x)}$$

faisons

$$\alpha(\omega_\nu - \varrho_\nu) = \omega_\nu + \varepsilon_\nu,$$

ε_ν étant une quantité positive telle que ω_ν soit un nombre entier, et que cet entier ne soit pas inférieur à ν. La quantité précédente peut alors s'écrire:

$$\frac{\left(\text{Mod}\, \dfrac{x}{a_{\nu-1}}\right)^{\omega_\nu}}{(\text{Mod}\, a_{\nu-1})^{\varepsilon_\nu}\, \text{Mod}\,(a_\nu - x)}$$

et l'on voit que sa racine de degré ν a zéro pour limite pour ν infini, de sorte que nous obtenons encore une série convergente qui définit une fonction analytique. La valeur de ω_ν donnée par l'expression:

$$\omega_\nu = \frac{\alpha \varrho_\nu}{\alpha - 1} + \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha - 1}$$

peut se mettre sous cette autre forme:

$$\omega_\nu = \frac{\log \text{Mod}\, R_\nu}{\log \text{Mod}\, a_\nu - \log \text{Mod}\, a_{\nu-1}} + \delta_\nu$$

en prenant δ_ν de manière à obtenir un entier non inférieur à ν, et quant au premier de ces nombres correspondant à $\nu = 1$ et que ne détermine pas cette formule, il est clair qu'on peut le prendre arbitrairement, et le supposer par exemple égal à zéro. Enfin je remarque que la convergence de la série par laquelle nous définissons la fonction $\mathfrak{F}(x)$, subsiste dans ses dérivées, de sorte que nous démontrons à la fois l'existence comme fonctions analytiques de $\mathfrak{F}(x)$, $\mathfrak{F}'(x)$, $\mathfrak{F}''(x)$ etc. Nous pouvons donc comme plus haut, construire une fonction telle qu'en en retranchant la fraction rationnelle unipolaire la plus générale:

$$\frac{R_\nu}{a_\nu - x} + \frac{R_\nu^1}{(a_\nu - x)^2} + \frac{R_\nu^2}{(a_\nu - x)^3} + \cdots$$

le reste soit fini pour $x = a_\nu$.

C'est une seconde démonstration de votre théorème que je vous offre, mon cher ami, après votre illustre maître, en témoignage de mes sentiments de sympathie et d'estime pour votre talent. De ce théorème dont M. ***Weierstrass*** a fait si justement ressortir l'importance, je vous indiquerai une con-

séquence pour la démonstration d'un des plus beaux résultats donnés par le grand analyste dans son mémoire sur les fonctions analytiques uniformes d'une variable. C'est un de mes élèves, M. *Bourguet,* qui a exposé dans son examen de doctorat la méthode suivante pour arriver à l'expression découverte par M. *Weierstrass* d'une fonction $\Phi(x)$, ayant une infinité de pôles et un nombre déterminé de points singuliers essentiels.

Soit encore $\mathfrak{F}(x)$ votre fontion, et posons:

$$\Phi(x)+\mathfrak{F}(x) = \Pi(x)$$

de sorte que cette nouvelle quantité n'ait plus aucun pôle, mais seulement n points singuliers essentiels $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$. Considérez une circonférence de rayon R, ayant son centre à l'origine et renfermant les points c d'une part et de l'autre le point x. Autour des points c décrivons des circonférences de rayon infiniment petit ϱ, et représentons les intégrales de la fonction $\frac{\Pi(z)}{z-x}$, effectuées le long de ces circonférences par:

$$\int_{(\varrho)} \frac{\Pi(z)}{z-x}\,dz; \quad \text{soit pareillement:} \quad \int_{(R)} \frac{\Pi(z)}{z-x}\,dz$$

l'intégrale relative à la circonférence de rayon R; je partirai de la relation suivante:

$$2i\pi\,\Pi(x)+\Sigma\int_{(\varrho)} \frac{\Pi(z)}{z-x}\,dz = \int_{(R)} \frac{\Pi(z)}{z-x}\,dz$$

où le signe Σ se rapporte aux divers points $c_1, c_2, \ldots c_n$. Cela posé, soit pour obtenir les intégrales qui les concernent:

$$z = c+\varrho e^{it}$$

on aura:

$$\int_{(\varrho)} \frac{\Pi(z)}{z-x}\,dz = -i\int_0^{2\pi} \frac{\Pi(c+\varrho e^{it})}{x-c-\varrho e^{it}}\,\varrho e^{it}\,dt.$$

Employons maintenant, dans l'hypothèse de ϱ infiniment petit, la série:

$$\frac{1}{x-c-\varrho e^{it}} = \frac{1}{x-c}+\frac{\varrho e^{it}}{(x-c)^2}+\cdots$$

qui sera convergente en supposant x aussi voisin de c qu'on le voudra, et soit pour abréger:

$$J_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi(c+\varrho e^{it})(\varrho e^{it})^{n+1}\,dt,$$

nous aurons cette expression:

$$\int_{(\varrho)} \frac{\Pi(z)}{z-x}\,dz = -2i\pi\left[\frac{J_1}{x-c}+\frac{J_2}{(x-c)^2}+\cdots+\frac{J_n}{(x-c)^n}+\cdots\right].$$

Faisant donc:

$$G(x) = J_1 x + J_2 x^2 + \cdots + J_n x^n + \cdots$$

on pourra ainsi écrire:

$$\int\limits_{(\varrho)} \frac{\Pi(z)}{z-x} dz = -2i\pi . G\left(\frac{1}{x-c}\right);$$

or il est visible que $G\left(\frac{1}{x-c}\right)$ étant fini, pour toute valeur de x sauf $x = c$, $G(x)$ est une fonction holomorphe ayant l'infini pour seul point singulier essentiel. Notre relation nous donne en conséquence:

$$\Pi(x) - \Sigma G\left(\frac{1}{x-c}\right) = \frac{1}{2i\pi} \int\limits_{(R)} \frac{\Pi(z)}{z-x} dz;$$

or l'intégrale du second membre se rapportant à une circonférence de rayon aussi grand qu'on veut, la série:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \cdots + \frac{x^n}{z^{n+1}} + \cdots$$

sera convergente pour une valeur arbitraire de x. Elle donne donc naissance à une fonction holomorphe et nous parvenons bien à la formule de M. ***Weierstrass:***

$$\Pi(x) = \Sigma G\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

en faisant entrer sous le signe Σ cette dernière fonction qui a pour point essentiel l'infini. De la même manière sans doute s'établirait la proposition plus générale que vous avez donnée en 1877 dans les mémoires de l'Académie des sciences de Stockholm. Mais j'aborde une autre question en vous développant davantage ce que je n'ai fait qu'indiquer dans ma dernière lettre.

La notion analytique de coupure que *Riemann* a le premier introduite dans la théorie générale des fonctions, me semble avoir une origine entièrement élémentaire et s'offrir comme d'elle-même dans l'étude de l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} \cdot dt$$

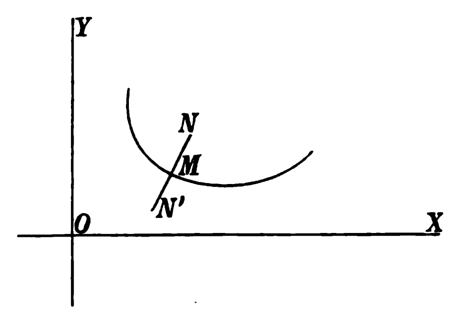
sous le point de vue que je vais en poser.

Je suppose en premier lieu, que dans l'intégration la variable t soit réelle et aille en croissant de t_0 à t_1 et j'admettrai aussi que les fonctions, $F(t, z)$ et $G(t, z)$ pouvant être réelles ou imaginaires soient holomorphes en t et z.

Cela étant, la fonction:

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} \cdot dt$$

aura une valeur unique et finie pour tous les points du plan, à l'exception du lieu qu'on détermine par la condition $G(t, z) = 0$. Cette équation fait correspondre à la série des valeurs réelles de t, croissant de t_0 à t_1, un nombre tantôt fini tantôt infini de portions de courbes ou de courbes entières suivant les cas, indiquant ainsi les points du plan où l'intégrale ne donne plus la valeur de la fonction. Mais ces courbes ont une signification plus importante; elles conduisent à la notion de coupure d'une manière facile comme vous allez voir. Soit la courbe de la figure l'une d'elles rapportée aux axes rectangulaires OX, OY



et M un de ses points pour lequel on a: $t = \theta$, $z = \zeta$. Je vais calculer la différence des valeurs de $\Phi(z)$, aux points N et N', pris sur la normale en M à des distances infiniment petites MN, MN' égales entres elles, et le caractère analytique auquel je veux parvenir, résultera de ce que cette différence est une quantité finie.

Formons d'abord l'équation de la normale en partant de la relation: $(X-x)\,dx + (Y-y)\,dy = 0$, où X et Y désignent les coordonnées de la droite et x et y celles de la courbe, que l'on suppose fonctions de t. On peut la remplacer par les deux suivantes:

$$X - x = \lambda \frac{dy}{dt},$$

$$Y - y = -\lambda \frac{dx}{dt},$$

λ étant une indéterminée réelle; on en tire:

$$X - x + i(Y-y) = -i\lambda \frac{d(x+iy)}{dt},$$

et par conséquent:

$$X + iY = z - i\lambda \frac{dz}{dt},$$

Maintenant l'équation de la courbe étant donnée sous la forme $G(t, z) = 0$, nous en déduisons:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{D_t G(t, z)}{D_z G(t, z)}.$$

En excluant donc les cas où l'on aurait pour certaines valeurs particulières

de t et de z, $D_t G(t, z) = 0$, ou $D_z G(t, z) = 0$, l'affixe d'un point quelconque de la droite sera:

$$Z = z + i\lambda \frac{D_t G(t, z)}{D_z G(t, z)}.$$

Faisons ensuite afin de séparer les quantités réelles et imaginaires:

$$\frac{D_t G(t, z)}{D_z G(t, z)} = p + iq$$

et nous aurons pour la normale les deux équations:

$$X = x - \lambda q$$
$$Y = y + \lambda p$$

qui donnent lieu à la remarque suivante.

Supposons d'abord p différent de zéro, je nommerai direction positive la partie de la droite qui au-delà du point de rencontre avec la courbe, s'élève indéfiniment au-dessus de l'axe des abscisses, et direction négative l'autre partie. On voit que p étant positif, la direction positive s'obtient si l'on fait croître λ de zéro à l'infini, l'autre étant donnée par les valeurs négatives de l'indéterminée, tandis que ce sera l'inverse dans l'hypothèse de p négatif. Faisons en second lieu l'hypothèse de $p = 0$, de sorte que la normale soit parallèle à l'axe des abscisses. La direction positive sera alors celle de la partie positive de cet axe, et s'obtiendra en donnant à λ des valeurs de signe contraire à celui de q.

Ceci établi, soit pour plus de clarté:

$$D_t G(t, z) = P(t, z)$$
$$D_z G(t, z) = Q(t, z)$$

et supposons qu'en M, on ait: $t = \theta$, $z = \zeta$. L'affixe du point N situé sur la direction positive de la normale, sera donnée pour une valeur infiniment petite et positive de λ, par la formule:

$$z = \zeta + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta, \zeta)}{Q(\theta, \zeta)}$$

où ε, étant l'unité en valeur absolue, a le signe de p lorsque p n'est point nul, et dans le cas de $p = 0$, le signe de $-q$.

Cela posé, faisons encore:

$$D_z F(t, z) = R(t, z);$$

en négligeant les infiniment petits du second ordre, on aura:

$$F(t, z) = F(t, \zeta) + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta, \zeta) R(t, \zeta)}{Q(\theta, \zeta)},$$
$$G(t, z) = G(t, \zeta) + i\varepsilon\lambda \frac{P(\theta, \zeta) Q(t, \zeta)}{Q(\theta, \zeta)}.$$

Enfin mettons pour abréger P et Q au lieu de $P(\theta, \zeta)$ et $Q(\theta, \zeta)$; ces expressions donneront:

$$\Phi(N) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{QF(t, \zeta) + i\varepsilon\lambda PR(t, \zeta)}{QG(t, \zeta) + i\varepsilon\lambda PQ(t, \zeta)} \cdot dt.$$

Passant ensuite du point N à son symétrique N', il viendra par le changement de λ en $-\lambda$:

$$\Phi(N') = \int_{t_0}^{t_1} \frac{QF(t, \zeta) - i\varepsilon\lambda PR(t, \zeta)}{QG(t, \zeta) - i\varepsilon\lambda PQ(t, \zeta)} \cdot dt$$

et après une réduction facile:

$$\Phi(N') - \Phi(N) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{2i\varepsilon\lambda PQ[F(t, \zeta) Q(t, \zeta) - G(t, \zeta) R(t, \zeta)]}{Q^2 G^2(t, \zeta) + \lambda^2 P^2 Q^2(t, \zeta)} \cdot dt.$$

Voilà donc la quantité dont j'ai maintenant à déterminer la valeur. C'est comme vous voyez une intégrale singulière puisque λ doit être supposé infiniment petit, et nous avons à considérer uniquement les éléments infinis donnés par les valeurs de la variable, qui annulent $G(t, \zeta)$. Or une telle valeur est $t = \theta$; j'ajoute qu'entre les limites $t = t_0$, $t = t_1$, l'équation $G(t, \zeta) = 0$ ne peut avoir aucune autre racine $t = \theta'$. Cette circonstance ne s'offrira en effet qu'autant que $z = \zeta$ sera un point double, et alors devront avoir lieu, comme il est très facile de le reconnaître, les conditions:

$$G(t, z) = 0, \quad D_t G(t, z) = 0, \quad D_z G(t, z) = 0,$$

contrairement aux restrictions qui ont été faites pour obtenir l'équation de la normale. Il suit de là que nous pouvons poser en négligeant le carré de $t - \theta$:

$$G(t, \zeta) = (t - \theta) P,$$

puis remplacer immédiatement par θ, la variable t; on trouve ainsi en simplifiant, l'expression si connue où μ et ν sont des quantités positives infiniment petites:

$$\Phi(N') - \Phi(N) = \frac{2i\pi\varepsilon F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)} \int_{\theta-\mu}^{\theta+\nu} \frac{\lambda\, dt}{(t-\theta)^2 + \lambda^2} = \frac{2i\pi\varepsilon F(\theta, \zeta)}{P(\theta, \zeta)}.$$

Ce résultat met en évidence pour les courbes telles que celle de la figure, le caractère analytique de coupures à l'égard de la fonction $\Phi(z)$. La discon-

tinuité est même d'une nature plus complexe que celle, qui joue un si grand rôle dans les travaux de *Riemann*, puisque la différence des valeurs de la fonction aux deux points en regard N et N' n'est plus seulement une constante, mais varie avec la position du point M. Par là se trouvent rattachées à des considérations élémentaires qui s'offrent je puis dire nécessairement au début du calcul intégral, les vues exposées récemment par M. *Weierstrass* sur le mode d'existence des fonctions de l'Analyse. (Sur la théorie des fonctions, Comptes rendus de l'Académie des sciences à Berlin, Août 1880.) J'essaierai tout à l'heure d'y revenir, mais je veux immédiatement faire une application de la formule obtenue à un exemple qui permette de vérifier le résultat.

Soit $\Phi(z) = \int_0^\infty \frac{t^a \sin z}{1+2t\cos z+t^2}\,dt;$ on trouve sur-le-champ que les coupures sont les droites $x=(2k+1)\pi$, k étant entière; mais il faut bien remarquer que chacune de ces droites est dans toute son étendue une coupure, pour l'une et l'autre des intégrales:

$$\int_0^1 \frac{t^a \sin z}{1+2t\cos z+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{t^a \sin z}{1+2t\cos z+t^2}\,dt,$$

qu'il faut par suite considérer successivement pour obtenir la variation de $\Phi(z)$. Soit en effet $\zeta=(2k+1)\pi+i\xi$ et pour fixer les idées supposons ξ positif; à cette valeur de ξ correspondent deux valeurs de t, l'une plus petite que l'unité $\theta=e^{-\xi}$ et l'autre plus grande $\theta=e^{\xi}$. Nous avons en conséquence pour la première intégrale, une variation que la formule générale: $\frac{2i\pi\varepsilon F(\theta,\zeta)}{P(\theta,\zeta)}$ après des réductions faciles et en remarquant que $\varepsilon=-1$, donne égale à $\pi e^{-a\xi}$. Pour la seconde on obtient par un calcul semblable $\pi e^{a\xi}$; il en résulte que:

$$\Phi(N')-\Phi(N) = \pi(e^{a\xi}+e^{-a\xi}).$$

C'est ce que je vais vérifier au moyen de la formule de *Legendre:*

$$\int_0^\infty \frac{t^a \sin z}{1+2t\cos z+t^2}\,dt = \frac{\pi \sin az}{\sin a\pi},$$

où l'on doit supposer la partie réelle de z comprise entre $-\pi$ et $+\pi$. Mais nous avons évidemment $\Phi(z+2\pi)=\Phi(z)$, ce qui permet d'obtenir la fonction dans tout le plan, et va nous donner les valeurs de:

$$\Phi(N') = \Phi[(2k+1)\pi+i\xi-\lambda],$$
$$\Phi(N) = \Phi[(2k+1)\pi+i\xi+\lambda].$$

Observant que la quantité infiniment petite λ est positive, je retrancherai de l'argument de la première $2k\pi$, et de l'argument de la seconde $2(k+1)\pi$. Cela fait, il est permis de poser $\lambda=0$, et nous trouvons immédiatement:

$$\Phi(N')=\frac{\pi\sin a(\pi+i\xi)}{\sin a\pi},\quad \Phi(N)=\frac{\pi\sin a(-\pi+i\xi)}{\sin a\pi}$$

d'où:

$$\Phi(N')-\Phi(N)=2\pi\cos ia\xi=\pi(e^{a\xi}+e^{-a\xi}).$$

On voit ainsi, pour le dire en passant, combien une observation plus attentive de résultats de calcul intégral depuis longtemps connus, aurait pu aisément conduire aux notions analytiques nouvelles, de notre époque.

La notion de coupure se présente de la manière la plus simple dans un cas particulier que je vais maintenant considérer. Soit $f(t)$ une fonction uniforme qui ne contient pas z et ayant un nombre fini ou infini de pôles. Si l'on pose:

$$\Phi(z)=\int_{t_0}^{t_1}f(t+z)\,dt,$$

vous voyez qu'à chaque pôle correspond une coupure représentée par un segment de droite parallèle à l'axe des abscisses, ou par cette parallèle tout entière si les limites sont $-\infty$ et $+\infty$. Cela étant, la formule générale:

$$\Phi(N')-\Phi(N)=\frac{2i\pi\varepsilon F(\theta,\zeta)}{P(\theta,\zeta)}$$

s'applique seulement dans le cas des pôles simples. Désignons l'un quelconque d'entre eux par p, l'affixe ζ du point M de la coupure se détermine en posant $\theta+\zeta=p$; nous observons ensuite que si l'on fait:

$$f(t)=\frac{F(t)}{G(t)},\quad \text{on aura:}\quad P(t,z)=G'(t+z),\quad Q(t,z)=G'(t+z)$$

d'où:

$$\frac{P(t,z)}{Q(t,z)}=1;$$

ainsi ε doit être supposé égal à $+1$. Nous trouvons donc en changeant les signes des deux membres:

$$\Phi(N)-\Phi(N')=\frac{2i\pi F(\theta+\zeta)}{G'(\theta+\zeta)}=-\frac{2i\pi F(p)}{G'(p)}$$

où la quantité $\frac{F(p)}{G'(p)}$ est précisément le résidu de $f(t)$ correspondant au pôle

p. Le résultat ainsi obtenu subsiste quel que soit l'ordre de multiplicité, on le démontre aisément comme il suit.

Considérons la fonction rationnelle, ou plutôt le groupe des fractions simples:

$$\frac{R}{t-p}+\frac{R'}{(t-p)^2}+\frac{R''}{(t-p)^3}+\cdots$$

qui est tel qu'en le retranchant de $f(t)$, la différence soit finie pour $t=p$. Il est clair qu'à l'égard de la coupure attachée au pôle p, on obtiendra la différence $\Phi(N)-\Phi(N')$, en substituant cette fonction rationnelle à $f(t)$. Or la fraction simple $\frac{R}{t-p}$ conduit comme nous l'avons dit, à la quantité constante $-2i\pi R$; pour les autres termes de la forme $\frac{1}{(t-p)^{n+1}}$ on a à considérer l'intégrale:

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{1}{(t-\theta+i\lambda)^{n+1}}-\frac{1}{(t-\theta-i\lambda)^{n+1}}\right]dt,$$

en faisant $z=\theta-p$, où θ est quantité complexe entre t_0 et t_1. La valeur rationnelle de l'intégrale indéfinie, à savoir:

$$-\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(t-\theta+i\lambda)^n}-\frac{1}{(t-\theta-i\lambda)^n}\right]$$

montre qu'elle s'évanouit avec λ, de sorte que nous avons simplement:

$$\Phi(N)-\Phi(N') = -2i\pi R.$$

Ce résultat est susceptible de beaucoup d'applications; en premier lieu je vais en déduire, en supposant que $f(t)$ soit une fonction rationnelle, la valeur de l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Partant pour cela de la fonction:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt,$$

je remarque d'abord que l'on a:

$$\Phi'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t+z)\,dz,$$

et par conséquent $\Phi'(z)=0$, si l'on admet comme il est nécessaire que $f(t)$ s'annule pour des valeurs infinies de la variable. On voit ainsi que $\Phi(z)$ est une constante indépendante de z, mais cette constante qui reste la même entre certaines limites, change de valeur en passant d'un intervalle

à un autre, comme on va voir. Nommons a_0+ib_0, a_1+ib_1, ... a_n+ib_n, les pôles de $f(t)$, rangés suivant l'ordre croissant de grandeur des coefficients de i, et R_0, R_1, ... R_n, les résidus qui leur correspondent. Les coupures de $\Phi(z)$ seront les parallèles à l'axe des abscisses, représentées par les équations: $a_0+ib_0=t+z$, $a_1+ib_1=t+z$, ... ou bien en faisant $z=x+iy$: $y=+b_0$, $y=+b_1$ ... etc., et ces parallèles pourront se trouver en partie au-dessous et en partie au-dessus de l'axe des abscisses. Cela étant, dans tout l'espace situé au-dessous de la première, $y=+b_0$, la valeur de $\Phi(z)$ ne change point et peut s'obtenir par conséquent, si l'on suppose $z=-\infty$. On a donc alors $\Phi(z)=0$, la fonction $f(t)$ étant nulle pour une valeur infinie de la variable. Franchissons maintenant la première coupure, $\Phi(z)$ s'augmentant de la quantité $-2i\pi R_0$ devient égal par suite à $-2i\pi R_0$. En dépassant la seconde $y=b_1$, on trouvera pareillement $\Phi(z)=-2i\pi(R_0+R_1)$, et si l'on continue ainsi de manière à atteindre l'espace illimité au-dessus de la dernière coupure $y=b_n$, nous obtiendrons pour cette dernière région:

$$\Phi(z) = -2i\pi(R_0+R_1+\cdots+R_n).$$

Mais alors, comme pour la première, la valeur de $\Phi(z)$ se trouve égale à zéro en faisant $z=+\infty$, d'où la condition bien connue $\Sigma R=0$, qui exprime que le degré du numérateur de la fonction rationnelle est inférieur de deux unités au degré du dénominateur. Ce qu'on vient de voir donne pour tout le plan la détermination de $\Phi(z)$, et nous en concluons l'intégrale proposée, sous la forme:

$$\Phi(0) = -2i\pi[R_0+R_1+\cdots+R_k] = 2i\pi[R_{k+1}+R_{k+2}+\cdots+R_n]$$

en supposant que la dernière des coupures située au-dessous de l'axe des abscisses soit $y=b_k$. Et en même temps se trouve sous forme d'intégrale définie l'expression analytique d'une fonction qui représente dans l'intervalle de deux coupures consécutives une constante qu'on peut prendre à volonté, et dont la valeur en dehors du système des coupures est zéro. Soit pour abréger, $p=a_0+ib_0$, $p_1=a_1+ib_1$ etc. et posons:

$$f(t) = \frac{C_0}{t-p_0}+\frac{C_1-C_0}{t-p_1}+\frac{C_2-C_1}{t-p_2}+\cdots-\frac{C_{n-1}}{t-p_n}$$

ou bien:

$$f(t) = \frac{C_0(p_0-p_1)}{(t-p_0)(t-p_1)}+\frac{C_1(p_1-p_2)}{(t-p_1)(t-p_2)}+\cdots+\frac{C_{n-1}(p_{n-1}-p_n)}{(t-p_{n-1})(t-p_n)};$$

la fonction:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dt$$

aura pour valeur $-C_0$, entre la première et la seconde coupure, $-C_1$ entre la seconde et la troisième, et enfin $-C_{n-1}$ dans le dernier intervalle. Remplaçant enfin ces constantes par des fonctions arbitraires de z, à savoir $F_0(z)$, $F_1(z)$, ... $F_{n-1}(z)$, on parviendra à l'expression suivante:

$$2i\pi\Phi(z) = F_0(z)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(p_1-p_0)\,dt}{(t-p_0-z)(t-p_1-z)}+F_1(z)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(p_2-p_1)\,dt}{(t-p_1-z)(t-p_2-z)}$$
$$+\cdots+F_{n-1}(z)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(p_n-p_{n-1})\,dt}{(t-p_{n-1}-z)(t-p_n-z)}$$

par laquelle n fonctions diverses sont successivement représentées dans les intervalles considérés.

Ce résultat peut se généraliser si l'on suppose que la variable t cesse d'être réelle pour suivre un chemin déterminé, les droites qui figurent les coupures ayant alors pour transformées des lignes courbes dont la nature dépend de ce chemin. De là me semblent résulter pour la conception générale des fonctions en analyse des conclusions semblables à celles qu'a obtenues M. *Weierstrass* en se plaçant à un point de vue bien différent, dans un travail de plus haut intérêt sur la théorie des fonctions publié par l'illustre géomètre dans les Comptes rendus de l'Académie des sciences de Berlin (Août 1880).

Je vais encore traiter de la même manière que précédemment la détermination dans tout le plan de la fonction:

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{2\pi+t_0} f(t+z)\,dt$$

où $f(t)$ est une expression rationnelle en $\sin t$ et $\cos t$ sans partie entière et qui est par suite finie pour des valeurs imaginaires infinies de la variable. On voit tout d'abord que $\Phi(z)$ est une constante, puisque l'on a:

$$\Phi'(z) = \int_{t_0}^{2\pi+t_0} f'(t+z)\,dt = f(2\pi+t_0+z)-f(t_0+z)$$

et par conséquent $\Phi'(z)=0$, la fonction $f(t)$ ayant 2π pour période. Désignons maintenant par $p_0=a_0+ib_0$, $p_1=a_1+ib_1$, ... $p_n=a_n+ib_n$, les pôles de $f(t)$ qui sont compris entre l'axe des ordonnées et une parallèle à la distance 2π de cet axe. Supposons-les toujours rangés suivant l'ordre croissant de grandeur des coefficients de i, et soient R_0, R_1, ... R_n, les résidus qui leur correspondent. L'un quelconque d'entre eux, p_k, détermine une

coupure représentée par l'équation:

$$t+z = p_k+2n\pi$$

d'où l'on conclut en faisant $z = x+iy$:

$$t+x = a_k+2n\pi, \quad y = b_k.$$

La première équation donne pour x toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, si l'on fait varier t de t_0 à $2\pi+t_0$, par conséquent les coupures sont les diverses droites: $y = b_0$, $y = b_1$, ... $y = b_n$. Ceci établi, désignons par H la valeur que prend $f(t+z)$ en faisant $z = x+iy$ et y infiniment grand négatif; nous aurons dans la région du plan située au-dessous de la première coupure: $\Phi(z) = 2\pi H$, puis successivement, entre la première et la seconde coupure, la seconde et la troisième, etc.:

$$\Phi(z) = 2\pi H - 2i\pi R_0, \quad \Phi(z) = 2\pi H - 2i\pi(R_0+R_1) \text{ etc.}$$

Enfin on obtient pour la région qui s'étend à l'infini au-delà de la dernière coupure:

$$\Phi(z) = 2\pi H - 2i\pi(R_0+R_1+\cdots+R_n).$$

Cette expression qui complète la détermination dans tout le plan de la fonction $\Phi(z)$, donne lieu à une remarque. Si l'on nomme G la valeur de $f(t+z)$ pour $z = x+iy$, et y infiniment grand positif, on a encore dans cette dernière région $\Phi(z) = 2\pi G$; or de là résulte la relation que j'ai donnée dans mon Cours d'Analyse (page 328):

$$R_0+R_1+\cdots+R_n = i(G-H).$$

On en tire immédiatement, si on l'applique à l'expression $\cot g \frac{t-z}{2} f(t)$, la décomposition de $f(t)$ en éléments simples.

Voici maintenant une détermination d'intégrale définie. Soit

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(t-z)}}{t-z} dt:$$

nous aurons une seule coupure, l'axe des abscisses, et comme le résidu de $\frac{e^{it}}{t}$ est l'unité, on obtient au-dessous de cet axe $J = 0$ et au-dessus $J = 2i\pi$. Faisons ensuite $J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(t-z)}}{t-z} dt$, nous aurons inversement $J_0 = -2i\pi$ au-dessous de l'axe, $J_0 = 0$ au-dessus et on en conclut:

$$\frac{J+J_0}{2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t-z)}{t-z} dt = -i\pi, \quad \frac{J-J_0}{2i} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t-z)}{t-z} dt = +\pi$$

dans la région inférieure, puis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t-z)}{t-z}\, dt = +i\pi, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t-z)}{t-z}\, dt = +\pi$$

pour la région au-dessus de l'axe. Vous voyez que dans les deux cas l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t-z)}{t-z}\, dt$, qui n'a pas de coupure, a la même valeur, d'où se tire en supposant $z=0$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \pi$.

Les expressions de J et de J_0 donnent encore:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t-z}\, dt = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{t-z}\, dt = -2i\pi e^{-iz},$$

ou bien:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t-z}\, dt = 2i\pi e^{iz}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{t-z}\, dt = 0,$$

et on en conclut facilement suivant que z est au-dessous ou au-dessus de l'axe des abscisses, dans le premier cas:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{t-z}\, dt = -i\pi e^{-iz}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t-z}\, dt = +\pi e^{-iz},$$

et dans le second:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos t}{t-z}\, dt = +i\pi e^{iz}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t-z}\, dt = +\pi e^{iz}.$$

Soit en dernier lieu $f(t)$ une fonction uniforme ayant pour périodes $2K$ et $2iK'$. Supposons qu'à l'intérieur du rectangle dont les sommets ont pour affixes:

$$t_0, \quad t_0+2K, \quad t_0+2iK', \quad t_0+2K+2iK',$$

les pôles rangés dans le même ordre que précédemment, soient $p_0, p_1, \ldots p_n$. Les coupures en nombre infini de la fonction

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_0+2K} f(t+z)\, dt$$

seront d'abord:

$$y = b_0, \; y = b_1, \; \ldots \; y = b_n,$$

puis en attribuant à μ toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$:

$$y = b_0 + 2\mu K', \; y = b_1 + 2\mu K', \; \ldots \; y = b_n + 2\mu K'.$$

Nommons encore $R_0, R_1, \ldots R_n$ les résidus correspondants aux pôles, $p_0, p_1, \ldots p_n$. Il est clair qu'étant donnée la valeur contante de $\Phi(z)$ entre

deux coupures consécutives, on en déduira la détermination de la fonction dans tout le plan. En supposant par exemple qu'entre la coupure $y = b_0$ et celle qui la précède, $y = b_n - 2K'$, on ait $\Phi(z) = \Phi_0$, nous obtiendrons successivement, entre la première et la seconde, la seconde et la troisième etc.:

$$\Phi(z) = \Phi_0 - 2i\pi R_0,$$
$$\Phi(z) = \Phi_0 - 2i\pi(R_0 + R_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

puis immédiatement au-dessus de la dernière $y = b_n$:

$$\Phi(z) = \Phi_0 - 2i\pi(R_0 + R_1 + \cdots + R_n).$$

Mais les points de cette région s'obtiennent en ajoutant $2iK'$ aux points de la première, dans laquelle nous avons $\Phi(z) = \Phi_0$. On doit donc retrouver cette valeur Φ_0, ce qui donne la relation fondamentale de la théorie des fonctions doublement périodiques:

$$R_0 + R_1 + \cdots + R_n = 0$$

que la considération des coupures permet ainsi de démontrer sans recourir à la notion des intégrales curvilignes.

Postscriptum. Au théorème sur la somme des résidus d'une fonction doublement périodique se joint un autre dont j'ai déduit la décomposition de ces fonctions en éléments simples, et qu'on démontre encore avec facilité.

Soit $f(t)$ la même fonction que précédemment, et posons:

$$F(t) = \frac{H'(\xi - t)}{H(\xi - t)} f(t);$$

il consiste en ce que la somme des résidus de $F(t)$ est indépendante de la quantité ξ.

Je partirai, pour l'établir, de la fonction

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_0 + 2K} F(t + z)\,dt,$$

et des relations concernant les deux régions précédemment considérées, à savoir:

$$\Phi(z) = \Phi_0$$
$$\Phi(z + 2iK') = \Phi_0 - 2i\pi S,$$

en désignant par S la somme des résidus de $F(t)$. Cela étant, l'équation

$$\frac{H'(x - 2iK')}{H(x - 2iK')} = \frac{H'(x)}{H(x)} + \frac{i\pi}{K}$$

fait voir que l'on a:

$$F(t+z+2iK') = F(t+z)+\frac{i\pi}{K}f(t+z)$$

et par conséquent:

$$\Phi(z+2iK') = \Phi(z)+\frac{i\pi}{K}\int_{t_0}^{t_0+2K}f(t+z)\,dt.$$

Or l'expression de S à laquelle nous sommes ainsi amené, à savoir:

$$S = -\frac{1}{2K}\int_{t_0}^{t_0+2K}f(t+z)\,dt$$

est bien en effet indépendante de ξ.

On donne dans les éléments comme application des méthodes de *Cauchy*, les intégrales:

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}-x^{b-1}}{1-x}\,dx = \pi(\operatorname{cotg} a\pi-\operatorname{cotg} b\pi),$$

ou bien si l'on pose $x = e^t$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}}{1+e^t}\,dt = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^t}\,dt = \pi(\operatorname{cotg} a\pi-\operatorname{cotg} b\pi).$$

Elles s'obtiennent par la considération des coupures, comme vous allez voir.

Soit d'abord $f(t) = \frac{e^{at}}{1+e^t}$; les pôles de cette fonction sont:

$$t = (2\mu+1)i\pi,$$

et en posant:

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t+z)\,dt,$$

nous en conclurons pour coupures, les droites $y = (2\mu+1)\pi$. Considérons deux points z et $z+2i\pi$, séparés par la première coupure au-dessus de l'axe des abscisses $y = \pi$; le résidu de $f(t)$ qui correspond au pôle $t = i\pi$, a pour valeur $-e^{i\pi a}$, et nous avons par suite:

$$\Phi(z+2i\pi) = \Phi(z)+2i\pi e^{i\pi a}.$$

Mais d'autre part:

$$\Phi(z+2i\pi) = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t+z+2i\pi)\,dt = e^{2i\pi a}\Phi(z)$$

d'où la relation:

$$\Phi(z) + 2i\pi e^{i\pi a} = e^{2i\pi a}\Phi(z),$$

et par conséquent:

$$\Phi(z) = -\frac{2i\pi e^{i\pi a}}{1-e^{2i\pi a}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Soit en second lieu:

$$f(t) = \frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^{t}},$$

les pôles seront $t = 2\mu i\pi$, en exceptant la valeur $\mu = 0$, de sorte que la fonction

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+z)\,dz$$

conservera la même détermination entre les deux parallèles $y = -2\pi$ et $y = 2\pi$. Nous pourrons donc écrire, en supposant z compris entre les droites $y = -\pi$ et $y = \pi$:

$$\Phi(z) = \Phi(z+\pi),$$

et cette relation donne pour $z = 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^{t}}\,dt = e^{i\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^{t}}\,dt - e^{i\pi b}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{bt}}{1+e^{t}}\,dt$$

$$= \pi\left(\frac{e^{i\pi a}}{\sin a\pi} - \frac{e^{i\pi b}}{\sin b\pi}\right)$$

$$= \pi\,(\operatorname{cotg} a\pi - \operatorname{cotg} b\pi).$$

Cependant on peut désirer obtenir cette même intégrale, directement et indépendamment de la première; on y parvient ainsi.

Faisons pour un moment:

$$\alpha = e^{2i\pi a}, \quad \beta = e^{2i\pi b}$$

de sorte que les résidus de $\frac{e^{at}-e^{bt}}{1-e^{t}}$ qui correspondent aux pôles $t = 2i\pi$ et $t = 4i\pi$, soient:

$$R_1 = \beta - \alpha, \quad R_2 = \beta^2 - \alpha^2.$$

Si nous supposons z compris entre l'axe des abscisses et la première coupure $y = 2\pi$, nous aurons en franchissant successivement cette coupure et la suivante $y = 4\pi$:

$$\Phi(z+2i\pi) = \Phi(z) - 2i\pi R_1,$$

$$\Phi(z+4i\pi) = \Phi(z) - 2i\pi(R_1+R_2).$$

Or on trouve aisément la relation:

$$\Phi(z+4i\pi)-(\alpha+\beta)\Phi(z+2i\pi)+\alpha\beta\Phi(z) = 0,$$

elle donne sur-le-champ:

$$(1-\alpha)(1-\beta)\Phi(z) = -2i\pi[(\alpha+\beta)R_1-R_1-R_2],$$

puis en employant les valeurs des deux résidus:

$$\Phi(z) = 2i\pi\frac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)},$$

ou encore:

$$\Phi(z) = i\pi\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right).$$

Or il suffit de remplacer α et β par leurs valeurs: $e^{2i\pi a}$, $e^{2i\pi b}$ pour obtenir:

$$\Phi(z) = \pi(\operatorname{cotg} a\pi-\operatorname{cotg} b\pi).$$

Ces quelques exemples suffisent ce me semble pour montrer l'utilité de la notion de coupure. J'ajoute encore qu'en supposant imaginaires les limites de l'intégrale $\int_{t_0}^{t_1} f(t+z)\,dt$, et faisant $t=\varphi(u)+i\psi(u)$, de manière que la variable décrive un chemin quelconque entre ces limites, la coupure rectiligne qui correspond au pôle $p=a+ib$, devient la courbe représentée par les équations:

$$x=a-\varphi(u), \quad y=b-\psi(u),$$

c'est-à-dire le symétrique du chemin décrit par la variable, transporté parallèlement à lui-même, de l'origine des coordonnées au pôle. L'expression entièrement élémentaire au moyen d'une intégrale définie, de fonctions présentant de telles circonstances, montre combien est nécessaire et je puis dire générale en analyse l'idée de discontinuité si longtemps limitée à ces deux faits, du passage par l'infini des fonctions fractionnaires, des sauts brusques de la formule de *Fourier* et de quelques autres développements analogues des fonctions en série. Mais ce ne sont pas seulement les intégrales définies qui donnent naturellement et d'elles-mêmes ces nouveaux modes de discontinuité auxquels est attachée la notion de coupure. Il y a lieu tout autant je présume, à l'égard des équations linéaires:

$$G(t,z)\frac{d^n y}{dt^n}+G_1(t,z)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots = 0$$

de considérer la variation de l'intégrale, aux deux bords de la courbe définie par la condition $G(t, z) = 0$. Et à l'égard d'une équation:

$$G(t)\frac{d^n y}{dt^n} + G_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots = 0$$

dont les coefficients ne contiennent pas z, on obtiendra des coupures rectilignes attachées aux points singuliers, en introduisant cette variable de la manière suivante:

$$G(t+z)\frac{d^n y}{dt^n} + G_1(t+z)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots = 0.$$

Enfin d'autres circonstances que je ne puis qu'entrevoir obscurément, seront sans doute révélées par l'étude de l'intégrale double:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_{u_0}^{u_1} du \frac{F(t, u, z)}{G^2(t, u, z)}.$$

La condition $G(t, u, z) = 0$, ne définirait-elle pas en faisant varier t et u entre les limites de l'intégrale, un espace pour lequel échapperait la définition de la fonction de sorte que dans la conception générale de fonction on doive admettre ainsi que l'a déjà dit M. *Weierstrass*, l'existence de lacunes comme possible? *)

---

*) Voici au sujet de ces fonctions présentant des espaces lacunaires, des résultats extrêmement intéressants qui m'ont été communiqués par un de mes élèves, M. *Poincarré*, ingénieur des mines, professeur à la Faculté des Sciences de Caen.

Soient

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n$$

n quantités imaginaires de module plus petit que 1,

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots \quad \alpha_n$$

n quantités imaginaires quelconques, x la variable indépendante. La série:

$$\sum \frac{u_1^{p_1} u_2^{p_2} \cdots u_n^{p_n}}{x - \dfrac{p_1\alpha_1 + p_2\alpha_2 + \cdots + p_n\alpha_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}}$$

où l'on donne à $p_1, p_2, \ldots p_n$ toutes les valeurs entières positives, sera convergente si x est extérieur au polygone convexe circonscrit aux n points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$; elle sera divergente s'il est à l'intérieur de ce polygone. Elle définit donc une fonction présentant ce polygone comme espace lacunaire. Cette fonction n'est qu'un cas particulier de la suivante.

Soit une équation aux différences partielles,

$$(1.) \quad u_1 F_1 \frac{dz}{du_1} + u_2 F_2 \frac{dz}{du_2} + \cdots + u_n F_n \frac{dz}{du_n} = z$$

---

où $F_1, F_2, \dots F_n$ sont des fonctions développées en séries suivant les puissances croissantes de $u_1, u_2, \dots u_n$ et d'un paramètre arbitraire x; ces fonctions sont supposées se réduire respectivement à

$$x-a_1, \quad x-a_2, \quad \dots \quad x-a_n$$

pour

$$u_1 = u_2 = \dots = u_n = 0.$$

Il existe une série ordonnée suivant les puissances des quantités u, et satisfaisant formellement à l'équation (1.). Les coefficients de cette série et sa somme quand elle est convergente, dépendent de x.

Donnons à $u_1, u_2, \dots u_n$ des valeurs de module suffisamment petit, la série définira une fonction présentant comme espace lacunaire, le polygone convexe circonscrit à $a_1, a_2, \dots a_n$.

Paris, décembre 1880.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Fortsetzung; siehe Bd. 87 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Die homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, in welchen der Differentialausdruck durch ein ***System normaler Differentialausdrücke*** (s. die Abh. des Verfassers Bd. 83 dieses Journals No. 1) darstellbar ist, sind in der folgenden Abhandlung weiter behandelt. Es werden die Integrale dieser Differentialgleichungen bei einem singulären Punkte im Anschlusse an die Untersuchungen in Abh. Bd. 87 No. 7 III dargestellt (No. 1, 2), und es wird gezeigt, dass man im Allgemeinen (No. 5, 6, 9) bei diesen Differentialgleichungen den Werth ihrer Integrale ***mit beliebig vorgeschriebener Annäherung vermittelst elementarer Operationen*** (No. 3, 4) berechnen kann. Das Verfahren, den ursprünglichen Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darzustellen, welches in Abh. Band 83 auseinandergesetzt war, ist hier vereinfacht (No. 7, 8), und es ergiebt sich, dass die Durchführung dieser Darstellung hauptsächlich von der Auflösung algebraischer Gleichungen abhängt, deren Coefficienten auf ***algebraische*** Weise mit den Coefficienten der Differentialgleichung zusammenhängen und deren Wurzeln die Exponenten in den Entwickelungen der Integrale bei den singulären Punkten der Differentialgleichung bestimmen. Durch die in den Abh. Bd. 83, 87 und in der folgenden Abhandlung erhaltenen Resultate ist nun ***die Integration der meisten linearen Differentialgleichungen der genannten Art vollzogen***.

1.

In der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m}+p_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+p_m y = F_m(y,x) = 0$$

mit rationalen Coefficienten sei der Differentialausdruck $F_m(y,x)$ durch ein

System normaler Differentialausdrücke, also unter folgender Form darstellbar:

$$(2.)\qquad f_{\alpha_0}(y,x)=y_1,\quad f_{\alpha_1}(y_1,x)=y_2,\quad \dots\quad f_{\alpha_l}(y_l,x)=F_m(y,x),$$

wo

$$(3.)\qquad f_{\alpha_k}(y_k,x) \;=\; \Omega_k \bar f_{\alpha_k}(\Omega_k^{-1}y_k,x)$$

ein normaler Differentialausdruck ist, der determinirende Factor $\Omega_k = e^{W_k(x)}$, $W_k(x)$ eine rationale Function, die in Partialbrüche zerlegt zum constanten Gliede Null hat, und auch selbst Null sein kann, $\bar f_{\alpha_k}(\bar y_k, x)$ ein regulärer Differentialausdruck α_k^{ter} Ordnung (s. Abh. Bd. 83 No. 1). In dem System (2.) kann die Anzahl der Bestandtheile $l \geqq 1$ sein. Es sollen die Integrale dieser Differentialgleichung bei einem singulären Punkte dargestellt werden.

Wenn die Differentialgleichung (1.) in mehrere Differentialgleichungen zerfällt, in denen normale Differentialausdrücke gleich Null gesetzt sind, wenn es also Differentialgleichungen letzterer Art giebt, deren Integrale unter einander linearunabhängig sind und zusammen ein System linearunabhängiger Integrale der Differentialgleichung (1.) bilden, so kommt man auf den Fall zurück, wo Differentialgleichungen mit nur regulären Integralen zu integriren sind, deren Integrale alsdann mit Ausdrücken $\Omega = e^{W(x)}$ (3.) multiplicirt werden. Weiteres über diesen Fall folgt No. 9 I.

Hier wird zur Untersuchung der Integrale der Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ bei einem singulären Punkte die Darstellung von $F_m(y,x)$ durch das System (2.) zu Grunde gelegt. *Nun sollen die Integrale bei einem singulären Punkte $x=a$ im Endlichen betrachtet werden.* Die Behandlung des Falles, wo der Punkt $x=\infty$ singulär ist, kommt durch die Substitution $x=\frac{1}{t}$ (s. Abh. Bd. 83 No. 9 (12.), die vorliegende Abhandlung No. 5 (6.)) auf die des vorigen Falles zurück.

In dem Systeme (2.) werden diejenigen auf einander folgenden Differentialausdrücke zu einem zusammengezogen, in welchen die in Partialbrüche zerlegten rationalen Functionen $W(x)$ der determinirenden Factoren die Glieder, in denen sie für $x=a$ unendlich werden, übereinstimmend haben. Hierdurch entstehe das System

$$(4.)\qquad F_{\alpha_0}(y,x)=y_1',\quad F_{\alpha_1}(y_1',x)=y_2',\quad \dots\quad F_{\alpha_{l'}}(y_{l'}',x)=F_m(y,x),$$

wo

$$(5.)\qquad F_{\alpha_k}(y_k,x)=e^{w_k}\bar F_{\alpha_k}(e^{-w_k}y_k,x),\qquad (k=0\dots l')$$

ist, w_k von der Form $\sum\limits_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ oder gleich Null und je zwei auf ein-

ander folgende Grössen w_k von einander verschieden, $\overline{F}_{\alpha_k}(\overline{y}_k, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck α_k^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, so beschaffen, dass in der Differentialgleichung $\overline{F}_{\alpha_k}(y_k, x) = 0$ bei $x = a$ der charakteristische Index gleich Null ist.

Die Exponentengleichung (s. Abh. Bd. 83 p. 119) von $\overline{F}_{\alpha_k}(y_k, x) = 0$ bei $x = a$ habe die Wurzeln

$$(6.) \quad r_{k\mathfrak{b}} \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k),$$

die so angeordnet sind, dass diejenigen Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen und unter letzteren die vorhergehende einen reellen Theil habe, der nicht kleiner als der der folgenden ist.

Die Integrale von $\overline{F}_{\alpha_k}(\overline{y}_k, x) = 0$ bei $x = a$ treten dann unter der Form auf

$$(7.) \quad \overline{y}_{k\mathfrak{b}} = \nu_{k1} \int dx\, \nu_{k1}^{-1} \nu_{k2} \dots \int \nu_{k\mathfrak{b}-1}^{-1} \nu_{k\mathfrak{b}}\, dx, \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$$

wo

$$(8.) \quad \nu_{k\mathfrak{b}} = (x-a)^{r_{k\mathfrak{b}} - \mathfrak{b} + 1} \psi_{k\mathfrak{b}}(x) \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$$

ist, $\psi_{k\mathfrak{b}}(x)$ eine Entwickelung der Form $\sum\limits_0^\infty c_a (x-a)^a$ hat, worin c_0 von Null verschieden, $c_a = c_0 \mathfrak{a}_a$, $\mathfrak{a}_a$ eindeutig bestimmt ist, welche Entwickelung in einem gewissen Kreise mit $x = a$ als Mittelpunkt und von Null verschiedenem Radius convergirt (s. Abh. Bd. 83 No. 9 (14.)). Die Integrale von

$$F_{\alpha_k}(y_k, x) = e^{w_k} \overline{F}_{\alpha_k}(e^{-w_k} y_k, x) = 0$$

sind

$$(9.) \quad y_{k\mathfrak{b}} = \mu_{k1} \int dx\, \mu_{k1}^{-1} \mu_{k2} \dots \int \mu_{k\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_{k\mathfrak{b}}\, dx, \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$$

wo

$$(10.) \quad \mu_{k\mathfrak{b}} = e^{w_k} \nu_{k\mathfrak{b}} \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_k)$$

ist. Die Integrale von $F_m(y, x) = 0$ sind alsdann

$$(11.) \quad y_\mathfrak{b} = \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \dots \int \mu_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \mu_\mathfrak{b}\, dx, \quad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{l'})$$

wo in den μ der Zeiger

$$(12.) \quad \begin{cases} \mathfrak{b} = \mathfrak{c} = 0\mathfrak{c}, & (\mathfrak{c} = 1 \dots \alpha_0) \\ \mathfrak{b} = \alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1} + \mathfrak{c} = k\mathfrak{c}, & \binom{\mathfrak{c} = 1 \dots \alpha_k}{k = 1 \dots l'} \end{cases}$$

zu setzen ist, alsdann die Werthe der μ aus (10.) zu nehmen sind. (Vgl.

Abh. Bd. 83 No. 9 I). Die Determinante der Integrale (11.)

$$(13.)\quad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \cdots & \frac{dy_m}{dx} \\ \vdots & & & \\ \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix} = D$$

ist (vgl. Abh. Bd. 87 No. 7 III b):

$$(14.)\quad D = \mu_1\mu_2\ldots\mu_m = e^{-\int p_1 dx}.$$

Die rationale Function p_1 werde in Partialbrüche zerlegt. Die singulären Punkte von $F_m(y, x) = 0$ im Endlichen ausser a seien a_1 bis $a_{\varkappa-1}$. Es werde zur Abkürzung

$$(15.)\quad \begin{cases} \alpha_0 w_0 + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{l'} w_{l'} = v, \\ r_{k1} + r_{k2} + \cdots + r_{k\alpha_k} - \frac{(\alpha_k - 1)\alpha_k}{2} = R_k \end{cases}$$

gesetzt, wo die w aus (5.), die r aus (6.) hervorgehen, so findet sich gemäss (14.) oder, indem man p_1 aus (4.) herleitet, der Ausdruck

$$(16.)\quad e^{-\int p_1 dx} = c(x-a)^{R_0 + \cdots + R_{l'}} e^{v}\left(1 - \frac{x-a}{a_1 - a}\right)^{\varrho_1} \cdots \left(1 - \frac{x-a}{a_{\varkappa-1} - a}\right)^{\varrho_{\varkappa-1}} e^{U(x) - U(a)},$$

wo die Factoren $\left(1 - \frac{x-a}{a_\mathfrak{b} - a}\right)^{\varrho_\mathfrak{b}}$ für $x = a$ den Werth 1 erhalten, $U(x)$ eine rationale Function ist, die für $x = a$ nicht unendlich wird, c eine Constante. Diese Constante ergiebt sich alsdann aus der Entwickelung der beiden Seiten von (14.) bei $x = a$. Wird

$$(17.)\quad \psi_{k1}(a)\,\psi_{k2}(a)\ldots\psi_{k\alpha_k}(a) = \Delta_k$$

gesetzt, wo die ψ aus (8.) hervorgehen, so erhält man

$$(18.)\quad c = \Delta_0 \Delta_1 \ldots \Delta_{l'}.$$

Unter den Wurzeln (6.) der Exponentengleichung von $\overline{F}_{\alpha_k} = 0$ bei $x = a$ in der bei (6.) angegebenen Reihenfolge möge eine Gruppe im Ganzen von λ' ($\lambda' \gtreqless 1$) Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, $r_1, r_2, \ldots r_{\lambda'}$ vorkommen. Dann werden aus (7.) die λ' Integrale von $\overline{F}_{\alpha_k} = 0$ entnommen, bei welchen in dem zuletzt stehenden $\nu_{k\mathfrak{b}}$ in dem Exponenten $r_{k\mathfrak{b}} - \mathfrak{b} + 1$ $r_{k\mathfrak{b}} = r_1, r_2, \ldots r_{\lambda'}$ ist, und bei Ausführung der Integrationen durch Integration in den einzelnen Gliedern der Entwickelungen jedesmal das constante Glied annullirt wird. Hierdurch erhält man die Entwickelungen dieser λ' Integrale von $\overline{F}_{\alpha_k} = 0$

$$(19.)\quad \overline{Y}_a = (x-a)^{r_a}\{\chi_{a1}(x)+\chi_{a2}(x)\log(x-a)+\cdots+\chi_{aq_a}(x)(\log(x-a))^{q_a-1}\},$$
$$(a = 1\ldots\lambda')$$

wo die Functionen $\chi(x)$ Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty \gamma_b(x-a)^b$ haben, die bei demselben a für $x=a$ nicht alle verschwinden, $\chi_{aq_a}(x)$ von Null verschieden ist. Wenn in den Grössen $\psi(x)$ in (8.) $\varrho \gtreqless r_1 - r_{\lambda'} + 1$ Anfangsglieder entwickelt sind, so erhält man durch Ausführung der Integrationen (7.) bei diesen ϱ Gliedern die ϱ Anfangsglieder (von $(x-a)^0$ an) in den Entwickelungen der Grössen χ; dieselben verschwinden in dem Factor der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ nicht alle, wodurch die Zahl q_a bekannt wird (gemäss dem in Abh. Bd. 83 No. 9 vor (23.) Gesagten).

Aus (11.) ***erhält man dann die entsprechenden*** λ' ***Integrale von*** $F_m(y,x)=0$

$$(20.)\quad Y_a = \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\cdots\int \mu_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}^{-1} e^{w_k}\overline{Y}_a\,dx,\qquad (a=1\ldots\lambda')$$

wo für $\overline{Y}_a$ die Entwickelung (19.) zu setzen ist, bei Ausführung der Integrationen durch Integration in den einzelnen Gliedern der Entwickelungen jedesmal das constante Glied annullirt werden soll. Hier ist $k>0$ vorausgesetzt; in dem Falle $k=0$ hat man die Integrale von $\overline{F}_{\alpha_0}=0$ unter der Form (19.) mit e^{w_0} zu multipliciren, wodurch man die Integrale von $F_{\alpha_0}=0$ erhält. ***Aus*** (20.) ***und bei*** $k=0$ ***aus*** $F_{\alpha_0}=0$ ***gehen alsdann die Entwickelungen der*** λ' ***Integrale von*** $F_m=0$ ***hervor:***

$$(21.)\quad Y_a=(x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}\{\varphi_{a1}(x)+\varphi_{a2}(x)\log(x-a)+\cdots+\varphi_{as_a}(x)(\log(x-a))^{s_a-1}\},$$
$$(a=1\ldots\lambda')$$

wo die Functionen $\varphi_{ab}(x)$ innerhalb des Bezirkes, der zu dem Punkte $x=a$ in der Differentialgleichung $F_m(y,x)=0$ gehört, abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig sind, und daher durch die Summe zweier Potenzreihen, von denen die eine nach Potenzen von $x-a$, die andere nach Potenzen von $(x-a)^{-1}$ mit positiven ganzzahligen Exponenten fortschreitet, dargestellt werden (s. Abh. Bd. 87 No. 1). Der Grund, weshalb die ganze Zahl $\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}$, für welche bei $k=0$ Null eintritt, in den Exponenten $r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}$ aufgenommen worden ist, wird in No. 3 angegeben. Aus (11.) möge im Ganzen eine Gruppe von λ Integralen der Form (21.), in denen die Exponenten von $x-a$ sich von r_a nur um ganze Zahlen unterscheiden, hervorgehen.

Um nun die Integrale (20.) weiter zu untersuchen, wird zunächst von dem Systeme (4.) in Bezug auf die Wurzeln (6.) der Exponentengleichungen von $\overline{F}_{a_k}=0$ $(k=0\dots l')$ bei $x=a$ vorausgesetzt, dass jede Wurzel der Exponentengleichung von $\overline{F}_{a_\gamma}=0$ sich von jeder der Exponentengleichung von $\overline{F}_{a_k}=0$, wo $\gamma \lesseqgtr \varkappa$ ist, ***nicht um eine ganze*** Zahl unterscheidet. $s_{\mathfrak{a}}$ in (21.) wird dann gleich $q_{\mathfrak{a}}$ aus (19.), $\varphi_{a q_{\mathfrak{a}}}(x)$ von Null verschieden.

a.) Das Integral (19.) $\overline{Y}_{\mathfrak{a}}$ werde um den Punkt $x=a$ herum innerhalb eines Gebietes, welches durch eine sich selbst nicht schneidende Linie begrenzt wird und von singulären Punkten von $\overline{F}_{a_k}=0$ nur den Punkt $x=a$ enthält, längs der Begrenzung in positiver Richtung (diese liegt zu der von Innen nach Aussen erstreckten Normalen, wie die Strecke $+i$ zu der Strecke $+1$) fortgesetzt. Ein solcher Umgang um $x=a$ wird ein positiver genannt. Geht das Integral dadurch in $[\overline{Y}_{\mathfrak{a}}]$ über, so wird, indem jetzt $\lambda'=\lambda$ ist,

$$(22.)\qquad [\overline{Y}_{\mathfrak{a}}] = K_{\mathfrak{a}1}\overline{Y}_1+K_{\mathfrak{a}2}\overline{Y}_2+\dots+K_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}-1}\overline{Y}_{\mathfrak{a}-1}+e^{2\pi i r_{\mathfrak{a}}}\overline{Y}_{\mathfrak{a}},\qquad (\mathfrak{a}=1\dots\lambda),$$

wo die K Constanten sind. Dieses ergiebt sich, indem man den positiven Umgang um $x=a$ successive in dem Integrale (7.) vornimmt. Die Constanten K werden entweder aus dem Integrale (7.) nach dem Verfahren Abh. Bd. 83 No. 9 (25.) bestimmt, wozu es genügt, in den Grössen ψ in (8.) die $r_1-r_\lambda+1$ Anfangsglieder zu entwickeln und die Integrationen bei diesen auszuführen. Oder es wird nach Abh. Bd. 87 No. 2 I das Gleichungssystem aufgelöst, welches aus Gleichung (22.) und ihren $\mathfrak{a}-2$ (da der Coefficient von $\overline{Y}_{\mathfrak{a}}$ schon bekannt ist) ersten Ableitungen besteht. Die Determinante desselben mit $(x-a)^s$, wo $s=-\sum_1^{\mathfrak{a}-1} r_{\mathfrak{b}}+\frac{(\mathfrak{a}-2)(\mathfrak{a}-1)}{2}$, multiplicirt, ist bei $x=a$ einwerthig und stetig und für $x=a$ von Null verschieden, wie sich auf folgende Weise ergiebt. Wenn man die Integrale $\overline{Y}_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1\dots\lambda)$ durch ein System Integrale von $\overline{F}_{a_k}=0$ der Form

$$(23.)\qquad \overline{y}_{\mathfrak{b}} = \nu_1\int dx\,\nu_1^{-1}\nu_2\dots\int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\nu_{\mathfrak{b}}\,dx,\qquad (\mathfrak{b}=1\dots\lambda)$$

ausdrückt, wo $\nu_{\mathfrak{b}}=(x-a)^{r_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\psi_{\mathfrak{b}}(x)$ ist, $\psi_{\mathfrak{b}}$ eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty c_a(x-a)^a$ hat, worin c_0 von Null verschieden ist, die Exponenten $r_{\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b}=1\dots\lambda)$ in den ν die in (19.) sind, und bei den Integrationen das constante Glied annullirt wird, so gehen in den Ausdruck von $\overline{Y}_{\mathfrak{a}}$ nur die Integrale $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ bis $\overline{y}_{\mathfrak{a}}$ ein. Denn nach den Untersuchungen Bd. 87, pag. 242

ergiebt sich aus (7.), dass die Entwickelung von $\overline{Y}_\mathfrak{a}$ (19.) zu dem Exponenten $r_\mathfrak{a}$ gehört, und wenn $r_\mathfrak{a}$ einfache Wurzel der Exponentengleichung von $\overline{F}_{\alpha_k}=0$ ist, dass nur der von Logarithmen freie Theil in $\overline{Y}_\mathfrak{a}$ zu $r_\mathfrak{a}$ gehört, wenn $r_\mathfrak{a}$ mehrfache Wurzel ist und s-mal vorkommt und unter den s in der Reihenfolge r_1, r_2 bis r_λ nach einander stehenden gleichen Wurzeln die l^{te} ist, dass in $\overline{Y}_\mathfrak{a}$ die $(l-1)^{\text{te}}$ Potenz des $\log(x-a)$ die höchste von denen ist, deren Factoren zu $r_\mathfrak{a}$ gehören; entsprechend ist es bei $\overline{y}_\mathfrak{b}$ in (23.), woraus sich das Gesagte ergiebt. Demnach unterscheidet sich die Determinante (13.) bei $m=\mathfrak{a}-1$ der linearunabhängigen Functionen $\overline{Y}_1$ bis $\overline{Y}_{\mathfrak{a}-1}$ um einen von Null verschiedenen Factor, die Determinante der Substitutionscoefficienten, von der Determinante der Functionen $\overline{y}_1$ bis $\overline{y}_{\mathfrak{a}-1}$ und letztere ist $\nu_1\nu_2\dots\nu_{\mathfrak{a}-1}$. Es genügt zur Auflösung des genannten Gleichungssystems, in den Grössen $\chi_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{c}=1\dots\mathfrak{a})$ in (19.) und den entsprechenden Grössen in dem Ausdruck der Form (19.) von $[\overline{Y}_\mathfrak{a}]$ $r_1-r_{\mathfrak{a}-1}+1$ Glieder von $(x-a)^0$ an zu entwickeln. ***Die Constanten $K_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ ergeben sich unter der Form***

$$(24.)\qquad K_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = e^{2\pi i r_\mathfrak{a}} k_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},$$

wo $k_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ eine ganze rationale Function von $2\pi i$ ist mit Coefficienten, die rationale Ausdrücke von Constanten sind, welche in den Entwickelungen (19.) bei 1, 2, ... $\mathfrak{a}$ vorkommen, mit rationalen Zahlencoefficienten.

Nimmt man nun in dem Integrale $Y_\mathfrak{a}$ (20.) den positiven Umgang um $x=a$ vor, so erhält man als Resultat, dass in (20.) $[\overline{Y}_\mathfrak{a}]$ an Stelle von $\overline{Y}_\mathfrak{a}$ zu setzen ist, und bei den Integrationen die constanten Glieder zu annulliren sind, weil die Exponenten von $x-a$ in den jedesmal zu integrirenden Entwickelungen nicht ganzzahlig sind. (Vgl. Abh. Bd. 83, No. 9 (26.)). ***Daraus ergiebt sich, wenn man das Resultat des positiven Umganges um $x=a$ bei $Y_\mathfrak{a}$ durch $[Y_\mathfrak{a}]$ bezeichnet***

$$(25.)\qquad [Y_\mathfrak{a}] = K_{\mathfrak{a}1}Y_1+K_{\mathfrak{a}2}Y_2+\dots+K_{\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}-1}Y_{\mathfrak{a}-1}+e^{2\pi i r_\mathfrak{a}}Y_\mathfrak{a},\qquad (\mathfrak{a}=1\dots\lambda)$$

wo die K die Constanten aus (22.) ***sind.***

Werden in (25.) rechts die Ausdrücke (21.) für die Y eingesetzt und links der Ausdruck, den man aus der Entwickelung (21.) erhält, wenn man in dieser denselben Umgang um $x=a$ vollzieht, so erhält man durch Gleichsetzen der gleich hohen Potenzen des $\log(x-a)$ auf beiden Seiten von (25.) die Function $(x-a)^{r_g+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{g\mathfrak{b}}(x)$, $(\mathfrak{b}=2\dots g)$ ausgedrückt als homogene lineare Verbindung der Functionen

$$(x-a)^{r_\mathfrak{a}+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}(x), \quad \begin{Bmatrix} \mathfrak{a}=1\dots g-1 \\ \mathfrak{c}=1\dots\mathfrak{a} \end{Bmatrix}$$

mit constanten Coefficienten, die bekannt sind.

Es bleibt demnach übrig, die Functionen

$$(x-a)^{r_\mathfrak{a}+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{\mathfrak{a}1}(x), \quad (\mathfrak{a}=1\dots\lambda)$$

herzustellen.

b.) Der Ausdruck des Integrales $Y_\mathfrak{a}$ (20.) enthält $\bar{Y}_\mathfrak{a}$ (19.). In dem Ausdruck von $\bar{Y}_\mathfrak{a}$ sind diejenigen Functionen $\chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(x)$, welche identisch verschwinden, wegzulassen, man findet dieselben nach Abh. Bd. 87, No. 7 II. *b.*) pag. 291. Dann wird $Y_\mathfrak{a}$ eine Summe von Ausdrücken

$$(26.) \quad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\dots\int\mu_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}^{-1}e^{w_k}(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(x)(\log(x-a))^{\mathfrak{b}-1}dx.$$

Es werde nun ein Integral

$$(27.) \quad \int(x-a)^r\psi(x)\log(x-a)^n dx$$

betrachtet, in welchem $\psi(x)$ in der Umgebung von $x=a$ abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig ist, daher durch die Summe zweier Potenzreihen dargestellt wird, von denen die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, *r nicht ganzzahlig, n* ganzzahlig und positiv ist. In der Entwickelung des Integrales soll kein constantes Glied vorkommen.

Durch wiederholte Anwendung der Formel

$$(28.) \quad \begin{cases} \int\xi(x)(\log(x-a))^n dx = \eta(x)(\log(x-a))^n - n\int\zeta(x)(\log(x-a))^{n-1}dx, \\ \xi(x)=(x-a)^r\psi(x), \quad \eta(x)=\int(x-a)^r\psi(x)dx, \\ \zeta(x)=(x-a)^{-1}\int(x-a)^r\psi(x)dx, \end{cases}$$

wird das Integral (27.) in den Ausdruck entwickelt:

$$(29.) \quad \begin{cases} (\log(x-a))^n\int(x-a)^r\psi(x)dx \\ -n(\log(x-a))^{n-1}\int dx(x-a)^{-1}\int(x-a)^r\psi(x)dx \\ +n(n-1)(\log(x-a))^{n-2}\int dx(x-a)^{-1}\int dx(x-a)^{-1}\int(x-a)^r\psi(x)dx-\cdots \\ \cdots+(-1)^n n(n-1)\dots1\int dx(x-a)^{-1}\int dx(x-a)^{-1}\dots\int(x-a)^r\psi(x)dx, \end{cases}$$

wo bei jeder Integration das constante Glied in der Entwickelung zu annulliren ist. Wenn man nun die in Bezug auf die Exponenten r_{kb} (6.) $(k = 0 \dots l')$ oben (vor *a.*) gemachte Voraussetzung berücksichtigt, so ergiebt sich, dass man zur Ausführung der Integrationen in (26.) die Formel (29.) successive anwenden kann, indem bei den jedesmaligen Integrationen Integrale wie (28.) vorliegen, in denen r nicht ganzzahlig ist. ***Man kann daher jede Function*** $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{ab}(x)$ ***in*** (21.) ***zunächst mittels einer Formel darstellen,*** die eine Summe einer endlichen Anzahl von Integralen

$$(30.)\qquad U = \varkappa u_1 \int dx\, u_2 \int dx\, u_3 \dots \int u_s dx$$

ist, worin $\varkappa$ eine gegebene ganze Zahl ist, die Grössen u folgende sind:

$$(31.)\qquad \mu_1,\ \mu_1^{-1}\mu_2,\ \dots\ \mu_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}^{-1} e^{w_k}(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x)$$

aus (26.) und die Grösse $(x-a)^{-1}$. Es wird

$$u_1 = \mu_1,\quad u_s = \mu_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k}-1}^{-1} e^{w_k}(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x).$$

Die Grössen u_2 bis u_{s-1} gehen aus den Grössen

$$\mu_1^{-1}\mu_2 \quad \text{bis} \quad \mu_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}-1}^{-1}\mu_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}},$$

die in dieser Reihenfolge und jede einmal auftreten, und aus $(x-a)^{-1}$, welche Grösse zwischen den vorhin genannten steht oder fehlen kann, hervor. Bei den Integrationen in (30.) ist jedesmal das constante Glied in der Entwickelung zu annulliren. $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{aq_a}(x)$ wird durch ein einziges Integral (30.), worin nur die Grössen (31.) vorkommen und $\chi_{ab}(x)$ gleich $\chi_{aq_a}(x)$ ist gegeben. ***Es sind nun die Grössen*** (31.) μ ***und*** $\chi_{ab}(x)$ ***darzustellen.***

c.) Hat man m Functionen y unter der Form

$$(32.)\qquad y_1 = v_1,\quad y_2 = v_1\int v_2 dx,\quad \dots\quad y_m = v_1\int dx\, v_2 \dots \int v_m dx$$

und bildet man mit den $\mathfrak{a}$ ersten die Determinante (13.) für $m = \mathfrak{a}$, so ist dieselbe

$$(33.)\qquad D_{\mathfrak{a}} = v_1^{\mathfrak{a}} v_2^{\mathfrak{a}-1} \dots v_{\mathfrak{a}},$$

woraus folgt

$$(34.)\qquad v_1 = D_1,\quad v_2 = \frac{D_2}{D_1^2},\quad v_3 = \frac{D_1 D_3}{D_2^2},\quad \dots\quad v_m = \frac{D_{m-2}D_m}{D_{m-1}^2}$$

(*Hesse* dieses Journal Bd. 54 pag. 249 etc. (61.), (71.); vgl. Abh. Bd. 87 No. 7 III. *b*).

Bringt man die Grössen (32.) y auf die Form

$$(35.)\qquad y_1 = \nu_1,\quad y_2 = \nu_1\int \nu_1^{-1}\nu_2 dx,\quad \dots\quad y_m = \nu_1\int dx\, \nu_1^{-1}\nu_2 \dots \int \nu_{m-1}^{-1}\nu_m dx,$$

wo $\nu_a = v_1 v_2 \dots v_a$, so wird

$$(36.)\qquad D_a = \nu_1 \nu_2 \dots \nu_a,$$

woraus folgt

$$(37.)\qquad \nu_1 = D_1,\quad \nu_a = \frac{D_a}{D_{a-1}}\qquad (a = 2 \dots m).$$

Wird die Determinante (13.) der n Functionen

$$(38.)\qquad \nu_{m+1},\quad \nu_{m+1}\int \nu_{m+1}^{-1}\nu_{m+2}\,dx,\quad \dots\quad \nu_{m+1}\int dx\, \nu_{m+1}^{-1}\nu_{m+2}\dots\int \nu_{m+n-1}^{-1}\nu_{m+n}\,dx$$

durch

$$(39.)\qquad D'_n = \nu_{m+1}\nu_{m+2}\dots\nu_{m+n}$$

bezeichnet, so ist die Determinante (13.) der $m+n$ Functionen

$$(40.)\qquad \nu_1,\quad \nu_1\int \nu_1^{-1}\nu_2\,dx,\quad \dots\quad \nu_1\int dx\,\nu_1^{-1}\nu_2\dots\int \nu_{m+n-1}^{-1}\nu_{m+n}\,dx$$

gleich

$$(41.)\qquad \nu_1\nu_2\dots\nu_{m+n} = D_m D'_n.$$

Die Determinante (13.) von m Functionen y_1 bis y_m möge die ***Differentialdeterminante*** dieser Functionen genannt werden.

Um nun die Grössen μ in (10.) und zu dem Zwecke die ν in (8.) darzustellen, hat man die α_k Integrale (7.) von $\bar{F}_{\alpha_k} = 0$ $(k = 0 \dots l')$ zu entwickeln und aus diesen successive die α_k Differentialdeterminanten erster bis α_k^{ter} Ordnung zu bilden. Vermittelst dieser werden dann die Werthe ν nach (37.) ausgedrückt. Die α_k Integrale (7.) von $\bar{F}_{\alpha_k} = 0$ bilden Gruppen von Integralen, und die Integrale der einzelnen Gruppe haben die Entwickelungsform (19.). Die Functionen $(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x)$ in dieser Entwickelung genügen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 $T_\varrho(y, x) = 0$, *welche man nach* Abh. Bd. 87 No. 7 I. *aus der Differentialgleichung* $\bar{F}_{\alpha_k} = 0$ *mittels elementarer Operationen herleitet*. Diese Differentialgleichung $T_\varrho(y, x) = 0$ hat bei $x = a$ den charakteristischen Index gleich Null (l. c. Satz *c*.). Man kann nun eine beliebige Anzahl von Coefficienten in der Reihenentwickelung der Function $(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x)$ nach dem bei (19.) Gesagten berechnen, und ist hierdurch im Stande, die Reihenentwickelung von $(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x)$ mittels der Differentialgleichung $T_\varrho(y, x) = 0$, da diese bei $x = a$ den charakteristischen Index gleich Null hat, eindeutig zu bestimmen, und alsdann mittels derselben Differentialgleichung, weil sie rationale Coefficienten besitzt, weiter zu untersuchen, was in No. 3 geschieht. Die Reihenentwickelung von

$(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x)$ gilt in dem Bezirke, der bei der Differentialgleichung $\bar{F}_{a_k}=0$ zu $x=a$ gehört (Abh. Bd. 87 No. 1). Nun hat die $\mathfrak{a}^{\text{te}}$ der genannten Differentialdeterminanten gemäss (36.) eine Entwickelung von der Form

$$(x-a)^{\sum\limits_1^{\mathfrak{a}} r_{k\mathfrak{b}}-\frac{(\mathfrak{a}-1)\mathfrak{a}}{2}}\Psi_{\mathfrak{a}}(x),$$

wo $\Psi_{\mathfrak{a}}(x)=\sum\limits_0^{\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha$ und c_0 von Null verschieden ist.

Führt man daher in den Ausdruck (13.) dieser Determinante die Entwickelungen der Integrale unter der Form (19.) ein, so sind in diesen Entwickelungen und ihren Differentialquotienten die Glieder, welche Potenzen des $\log(x-a)$ enthalten, wegzulassen. Es stellt sich demnach die vorhin genannte Function $\Psi_{\mathfrak{a}}(x)$ als ein ganzer rationaler Ausdruck von Functionen dar, deren Reihenentwickelungen nach Potenzen von $x-a$ mit positiven ganzzahligen Exponenten gegeben sind. *Demnach erhält die Grösse* $\mu_{k\mathfrak{b}}$ (10.) *die Form*

$$(42.)\qquad \mu_{k\mathfrak{b}} = e^{w_k}(x-a)^{r_{k\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\frac{\eta_{k\mathfrak{b}}(x)}{\omega_{k\mathfrak{b}}(x)},$$

wo die Functionen $\eta(x)$ und $\omega(x)$ gleich $\Psi_{\mathfrak{b}}(x)$ bezüglich $\Psi_{\mathfrak{b}-1}(x)$ innerhalb des Bezirkes, der bei der Differentialgleichung $\bar{F}_{a_k}=0$ zu dem Punkte $x=a$ gehört, einwerthig und stetig und für $x=a$ von Null verschieden sind und als ganze rationale Functionen von Reihenentwickelungen nach Potenzen von $x-a$ mit positiven ganzzahligen Exponenten dargestellt werden.

d.) *Das Integral* (30.), *welches eine durch mehrfache Integration zu bildende Integralfunction darstellt, wird nun in folgender Weise durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt.*

Es sei $\psi(x-a)$ eine analytische Function, die innerhalb eines Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt mit von Null verschiedenem Radius R abgesehen von $x=a$ einwerthig und stetig ist und daher die Entwickelung hat

$$(43.)\qquad \psi(x-a) = \sum_0^{\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha+\sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha.$$

Dann ist, wenn r nicht ganzzahlig ist und das constante Glied in der Entwickelung des Integrales annullirt wird:

$$(44.)\qquad \int(x-a)^r\psi(x-a)\,dx = \sum_0^{\infty}\frac{c_\alpha(x-a)^{r+\alpha+1}}{r+\alpha+1}+\sum_{-1}^{-\infty}\frac{c_\alpha(x-a)^{r+\alpha+1}}{r+\alpha+1}.$$

Nun werde die Function $\alpha^\varepsilon=e^{\varepsilon\log\alpha}$, wo ε nicht ganzzahlig ist, über die Peripherie des Kreises in der α-Ebene mit dem Mittelpunkte in dem Punkte

$\alpha=0$ und dem Radius 1 in positiver Richtung (vgl. $a.$) von $\alpha=1$ an bis zu $\alpha=1$ zurück integrirt und dabei der Anfangswerth von $\log\alpha$, also $\log 1$ gleich Null genommen. Ein Integral, welches über diese Linie in der angegebenen Richtung von 1 an bis zu 1 zurück erstreckt wird, werde durch $\int_1^{\prime}$ bezeichnet. Dann ist

$$(45.)\quad \int_1^{\prime} \alpha^{\varepsilon}\,d\alpha = \frac{e^{\varepsilon 2\pi i}-1}{\varepsilon+1}.$$

Daher, wenn r nicht ganzzahlig, n ganzzahlig ist:

$$(46.)\quad \frac{1}{e^{r2\pi i}-1}\int_1^{\prime}\alpha^{r+n}\,d\alpha = \frac{1}{r+n+1}.$$

Es ergiebt sich hieraus

$$(47.)\quad \begin{cases} \int(x-a)^r\psi(x-a)\,dx = \sum\limits_0^{\infty}\dfrac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1}+\sum\limits_{-1}^{-\infty}\dfrac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1} \\ = \dfrac{(x-a)^{r+1}}{e^{r2\pi i}-1}\int_1^{\prime}\Big\{\sum\limits_0^{\infty}c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}\alpha^{\mathfrak{a}}+\sum\limits_{-1}^{-\infty}c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}\alpha^{\mathfrak{a}}\Big\}\alpha^r\,d\alpha \\ = \dfrac{(x-a)^{r+1}}{e^{r2\pi i}-1}\int_1^{\prime}\psi((x-a)\alpha)\,\alpha^r\,d\alpha. \end{cases}$$

Was die Integration in den einzelnen Gliedern betrifft, so werde daran erinnert, dass jede der beiden Potenzreihen, wie sich aus der unbedingten Convergenz derselben ergiebt, für die Werthe x in einem Gebiete innerhalb des Kreises um $x=a$ mit dem Radius R, welches den Punkt $x=a$ nicht enthält und für die in Betracht kommenden Werthe α in gleichem Grade convergirt (vgl. Abh. Bd. 87 No. 4 Anfang).

Es ist also die Integralfunction (44.) $\int(x-a)^r\psi(x-a)\,dx$, ***bei welcher*** r ***nicht ganzzahlig ist und in deren Entwickelung kein constantes Glied vorkommt, ausgedrückt durch das bestimmte Integral*** (47.), ***bei welchem unter dem Integralzeichen die gegebene Function*** $\psi(x-a)$ ***steht.***

Nun soll die Integralfunction

$$(48.)\quad \int dx\,(x-a)^{r_1}\psi_1(x-a)\int(x-a)^{r_2}\psi_2(x-a)\,dx$$

bei welcher ψ_1 und ψ_2 in dem Kreise mit dem Radius R Entwickelungen der Form (43.) haben, r_2 und r_1+r_2 nicht ganzzahlig sind, bei den Integrationen das constante Glied in der Entwickelung annullirt wird, durch ein bestimmtes Integral dargestellt werden. Durch zweimalige Anwendung der Formel (47.) erhält man

$$(49.)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{e^{r_2 2\pi i}-1}\displaystyle\int dx\,(x-a)^{r_1+r_2+1}\psi_1(x-a)\int_1^{\prime}\psi_2((x-a)\alpha_2)\,\alpha_2^{r_2}d\alpha_2 \\ = \dfrac{(x-a)^{r_1+r_2+2}}{(e^{(r_1+r_2+1)2\pi i}-1)(e^{r_2 2\pi i}-1)}\displaystyle\int_1^{\prime} d\alpha_1\psi_1((x-a)\alpha_1)\alpha_1^{r_1+r_2+1}\int_1^{\prime}\psi_2((x-a)\alpha_1\alpha_2)\alpha_2^{r_2}d\alpha_2 \\ = \dfrac{(x-a)^{r_1+r_2+2}}{(e^{(r_1+r_2+1)2\pi i}-1)(e^{r_2 2\pi i}-1)}\displaystyle\int_1^{\prime} d\alpha_1\int_1^{\prime}\psi_1((x-a)\alpha_1)\psi_2((x-a)\alpha_1\alpha_2)\alpha_1^{r_1+r_2+1}\alpha_2^{r_2}d\alpha_2. \end{cases}$$

Durch den Uebergang von $\sigma-1$ auf σ unter Anwendung der Formel (47.) erhält man nun zur Darstellung der Function

$$(50.)\quad \int dx(x-a)^{r_1}\psi_1(x-a)\int dx(x-a)^{r_2}\psi_2(x-a)\ldots\int(x-a)^{r_\sigma}\psi_\sigma(x-a)\,dx,$$

wenn ψ_1, ψ_2 bis ψ_σ in dem Kreise mit dem Radius R Entwickelungen der Form (43.) haben, r_σ, $r_{\sigma-1}+r_\sigma$, ... $r_1+r_2+\cdots+r_\sigma$ nicht ganzzahlig sind, bei den Integrationen das constante Glied in der Entwickelung annullirt wird, den Ausdruck

$$(51.)\quad \begin{cases} \dfrac{(x-a)^{\varrho_1+1}}{(e^{\varrho_1 2\pi i}-1)(e^{\varrho_2 2\pi i}-1)\ldots(e^{\varrho_\sigma 2\pi i}-1)}S, \\ S=\displaystyle\int_1^{\prime} d\alpha_1\int_1^{\prime} d\alpha_2\ldots\int_1^{\prime}\psi_1((x-a)\alpha_1)\psi_2((x-a)\alpha_1\alpha_2)\ldots\psi_\sigma((x-a)\,\alpha_1\ldots\alpha_\sigma)\alpha_1^{\varrho_1}\varrho_2^{\varrho_2}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}d\alpha_\sigma, \\ \varrho_1=r_1+r_2+\cdots+r_\sigma+\sigma-1,\quad \varrho_2=r_2+\cdots+r_\sigma+\sigma-2,\quad \ldots\quad \varrho_\sigma=r_\sigma, \end{cases}$$

bei welchem unter den Integralzeichen die gegebenen Functionen ψ stehen. Diese können in dem bestimmten Integrale nun irgend eine andere Darstellungsform als durch die Reihenentwickelung (43.) erhalten.

Die Darstellung durch das bestimmte Integral (51.) wird bei der Integralfunction U (30.) angewandt. Die Grössen μ erhalten hierbei die Ausdrücke (42.); der Radius R des Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt wird so gewählt (s. No. 3), dass die Grössen $\eta(x)$ und $\omega(x)$ innerhalb dieses Kreises nicht verschwinden, die Functionen $\chi_{ab}(x)$ (31.) innerhalb desselben einwerthig und stetig bleiben. Die Grössen $\psi(x-a)$ in (51.) erhalten dadurch die Form

$$(52.)\quad \psi(x-a) = e^{\tau}\frac{\xi(x-a)}{\zeta(x-a)},$$

wo τ gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-a}(x-a)^a$ ist, ξ und ζ innerhalb des Kreises mit dem Radius R einwerthig und stetig sind und ζ innerhalb desselben nicht verschwindet. Dann wird die Function U (30.) für die Punkte x innerhalb dieses Kreises, abgesehen von dem Mittelpunkte $x=a$,

durch ein bestimmtes Integral wie (51.) noch multiplicirt mit $\varkappa u_1$ dargestellt. Die Differentialquotienten der Function U (30.) nach x werden in folgender Weise gebildet. Man hat

$$(53.)\quad \frac{dU}{dx} = \varkappa \frac{du_1}{dx}\int dx\, u_2 \ldots \int u_s\, dx + \varkappa u_1 u_2 \int dx\, u_3 \ldots \int u_s\, dx.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhält man die successiven Differentialquotienten. In diesen treten die Integralfunctionen auf:

$$(54.)\quad \int dx\, u_2 \ldots \int u_s\, dx,\quad \int dx\, u_3 \ldots \int u_s\, dx,\quad \ldots \quad \int u_s\, dx,$$

die vermittelst der Formel (51.) darzustellen sind. Durch Addition von Grössen U erhält man die Functionen $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}\varphi_{ab}(x)$ in (21.), durch Addition der Differentialquotienten gleich hoher Ordnung dieser Grössen U den entsprechenden Differentialquotienten von $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}\varphi_{ab}(x)$.

Kennt man von dem Integrale Y_a (21.) und seinen $m-1$ ersten Ableitungen die Werthe in einem nichtsingulären Punkte der Differentialgleichung (1.) $F_m(y, x) = 0$ innerhalb des Kreises um $x = a$ mit dem Radius R, so ist dadurch vermittelst dieser Differentialgleichung die Reihenentwickelung von Y_a für den Bezirk dieses nichtsingulären Punktes gegeben. Es seien nun in einem nichtsingulären Punkte innerhalb des Bezirkes von $x = a$ bei der Differentialgleichung (1.) die Werthe der Integrale (11.), welche Integrale die Entwickelung (21.) haben, und die Werthe der $m-1$ ersten Ableitungen derselben ermittelt. Die Differentialdeterminante dieser Integrale ist durch (16.) und (18.) gegeben. Es sind ferner durch (25.) die Constanten in dem linearen Ausdrucke dieser Integrale, in welchen ein Integral bei dem positiven Umgange um den Punkt $x = a$ übergeht, bekannt. Dasselbe sei bei den Integralsystemen, die bei den anderen singulären Punkten von $F_m(y, x) = 0$ entwickelt sind, gefunden. Diese Ermittelungen reichen nach Abh. Bd. 87 No. 6 hin, um die Fortsetzung jedes Integrales von $F_m(y, x) = 0$ zu verfolgen. Die Untersuchung dieser Aufgabe wird in No. 4 durchgeführt.

e.) Die Functionen $\varphi_{ab}(x)$ (21.) sind in dem Bezirke, der bei der Differentialgleichung (1.) $F_m(y, x) = 0$ zu dem singulären Punkte $x = a$ gehört, abgesehen von $x = a$ einwerthig und stetig und haben daher Entwickelungen der Form (43.). Ebenso die Functionen $e^{-w_k}(x-a)^{\nu}\varphi_{ab}(x)$, wo e^{w_k} aus (20.) entnommen ist, ν eine ganze Zahl, über die später verfügt wird. Es werden

die Entwickelungen letzterer Functionen weiter betrachtet. Wird

$$e^{-w_k}(x-a)^{\nu}\varphi_{ab}(x) = v$$

gesetzt, so ist in der Entwickelung von v von der Form (43.) der Coefficient c_a

$$(55.)\qquad c_a = \frac{1}{2\pi i}\int v(x-a)^{-a-1}dx, \qquad a = -\infty\ldots+\infty$$

wo über die Peripherie eines Kreises innerhalb des Bezirkes von $x=a$ mit diesem Punkte als Mittelpunkt in positiver Richtung integrirt wird. Ist R_1 der Radius dieses Kreises und wird $x-a=R_1\beta$ gesetzt, so erhält man

$$(56.)\qquad c_a = \frac{R_1^{-a}}{2\pi i}\int_1^{\prime} v\beta^{-a-1}d\beta.$$

Die Function $e^{-w_k}(x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}\varphi_{ab}(x)$ genügt einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, die man aus der Differentialgleichung (1.) $F_m(y,x)=0$ herleitet. (Abh. Bd. 87 No. 7 I.) Dieselbe hat bei $x=a$ eine Exponentengleichung, unter deren Wurzeln es solche giebt, die sich von r_a nur um ganze Zahlen unterscheiden. Diejenige derselben mit dem kleinsten reellen Theile sei $r_{\lambda''}$. Dann wird die ganze Zahl ν in v gleich $r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}-r_{\lambda''}$ gesetzt, und aus der vorhergehenden Differentialgleichung die Differentialgleichung für v hergeleitet. Diese liefert eine Recursionsformel für die Coefficienten c_a (55.), die dieselben homogen und in constanter Anzahl enthält. Man braucht daher nur eine *endliche Anzahl dieser Coefficienten* zu kennen, um die übrigen aus diesen mittels der Recursionsformel herleiten zu können, wie in Abh. Bd. 87 No. 7 III*d* weiter ausgeführt ist.

Sollen in der Entwickelung der Function $e^{-w}(x-a)^{-(r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1})}Y_a$, wo Y_a das Integral (21.), w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ ist, Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten nur in endlicher Anzahl vorkommen, so muss $w=w_k$ sein, wie sich aus (11.) durch successive Division mit den Grössen μ und Differentiation ergiebt. Es dürfen dann in der Entwickelung von $e^{-w_k}(x-a)^{\nu}\varphi_{ab}(x)$, wo $\nu=r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}-r_{\lambda''}$ ist, gar keine Potenzen mit negativen Exponenten vorkommen, weil die Differentialgleichung von v bei $x=a$ eine Exponentengleichung hat, unter deren Wurzeln die ganzzahligen gleich oder grösser als Null sind. Die Recursionsformel für die Coefficienten c_a möge nun die $s+1$ Coefficienten c_{k+1} bis c_{k+1-s} enthalten. Die niedrigste ganze Zahl k, für welche der Coefficient von c_{k+1-s} in der

Recursionsformel etwa verschwindet, sei $\varkappa$. Dann ist, damit die Coefficienten $c_\mathfrak{a}$ mit negativem Zeiger $\mathfrak{a}$ sämmtlich verschwinden, gemäss der Recursionsformel nothwendig und hinreichend: wenn $\varkappa+1-s<-s$ ist, dass

$$(57.)\qquad c_{\varkappa+1-s}=c_{\varkappa+1-s+1}=\cdots=c_{-1}=0$$

ist; wenn $\varkappa+1-s\geqq-s$ ist, so wie, wenn der Coefficient von c_{k+1-s} nicht für eine ganze Zahl k verschwindet, dass

$$(58.)\quad c_{-s}=c_{-s+1}=\cdots=c_{-1}=0$$

ist.

2.

Es soll nun zunächst die *Darstellung der Coefficienten* $c_\mathfrak{a}$ in der Entwickelung der Function $e^{-w_k}\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(x)$ No. 1 (20.) (21.) von der Form

$$\sum_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}+\sum_{-1}^{-\infty}c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$$

gegeben werden. Die Darstellung der Coefficienten in der Entwickelung dieser Form bei der Function $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(x)$ wird in derselben Weise ausgedrückt. Die Function $e^{-w_k}\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(x)$ ist gleich der Summe einer endlichen Anzahl von Summanden; ein solcher sei v', dann ist $v'=e^{-w_k}(x-a)^{-(r_\mathfrak{a}+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1})}U$, wo U ein Integral (30.) der No. 1 ist. Dieses Integral U wird vermittelst des bestimmten Integrales (51.) der No. 1 dargestellt, wobei, um den Exponenten r in $(x-a)^r\psi(x-a)$ zu bilden, bei einer Grösse $\mu_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{c}=0\ldots k-1)$ der Werth $r_{\mathfrak{c}\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1$, bei $(x-a)^{r_\mathfrak{a}}\chi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(x)$ der Werth $r_\mathfrak{a}$, bei $(x-a)^{-1}$ der Werth -1 genommen wird. Dadurch erhält man für U den Ausdruck

$$(x-a)^{r_\mathfrak{a}+\alpha_0\cdots+\alpha_{k-1}}\psi_0(x-a)S,\quad \text{wo}\quad \psi_0(x-a)=c(x-a)^{-r_{01}}\mu_{01}$$

eine Darstellung der Form $e^{w_0}\sum\limits_0^\infty c_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}$ hat, worin c_0 von Null verschieden ist, S ein bestimmtes Integral ist, wie das Integral S in No. 1 (51.). v' wird daher

$$(1.)\qquad v'=e^{-w_k}\psi_0(x-a)S.$$

v' hat die Entwickelung

$$(2.)\qquad v'=\sum_0^\infty c'_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a}+\sum_{-1}^{-\infty}c'_\mathfrak{a}(x-a)^\mathfrak{a},$$

worin

$$(3.)\qquad c'_\mathfrak{a}=\frac{1}{2\pi i}\int v'(x-a)^{-\mathfrak{a}-1}dx=\frac{R'^{-\mathfrak{a}}}{2\pi i}\int_1^{\prime\prime} v'\beta^{-\mathfrak{a}-1}d\beta,\qquad \mathfrak{a}=-\infty\cdots+\infty$$

wenn $x-a=R'\beta$ gesetzt wird, $0<R'<R$ ist, wo R der Radius eines Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt, innerhalb dessen Peripherie die bei (52.) No. 1 genannten Functionen $\eta(x)$, $\omega(x)$, $\chi_{ab}(x)$ einwerthig und stetig bleiben, $\eta(x)$ und $\omega(x)$ nicht verschwinden. Die Grösse $e^{-w_k}\psi_0(x-a)$ werde durch $l(x-a)$, die Grösse unter den Integralzeichen in S durch $L(x-a)\alpha_1^{\varrho_1}\dots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}$ bezeichnet. Dann ist

$$(4.)\qquad c'_a = \frac{R'^{-a}}{2\pi i}\int_1^{\prime} d\beta\int_1^{\prime} d\alpha_1\int_1^{\prime} d\alpha_2\dots\int_1^{\prime} l(R'\beta)L(R'\beta)\beta^{-a-1}\alpha_1^{\varrho_1}\dots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}d\alpha_\sigma.$$

Die Function $l(x-a)L(x-a)$ hat den Ausdruck

$$(5.)\qquad l(x-a)L(x-a) = e^{G((x-a)^{-1})}H(x-a).$$

Hier ist $G((x-a)^{-1})$, welches durch Summation der Grösse w_0-w_k in l und der Grössen τ in e^τ bei den ψ in L entsteht, eine ganze rationale Function mit dem absoluten Gliede gleich Null von den Grössen

$$(x-a)^{-1},\ ((x-a)\alpha_1)^{-1},\dots((x-a)\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma)^{-1}.$$

Daher hat diese Function die Entwickelung

$$(6.)\qquad e^{G((x-a)^{-1})} = \sum_0^\infty g_{-b}(x-a)^{-b},$$

wo g_{-b} eine ganze rationale Function der Grössen α_1^{-1}, $(\alpha_1\alpha_2)^{-1},\dots(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma)^{-1}$ ist, die man aufstellen kann. Die Reihe (6.) convergirt noch, (ausser $x=a$) wenn die Coefficienten in G und daher auch die in g_{-b} durch ihre Moduln, die Grössen α_1^{-1} bis $(\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma)^{-1}$ durch 1 und $x-a$ durch Mod $(x-a)$ ersetzt werden. Die Function $H(x-a)$ ist ein Quotient, dessen Zähler und Nenner Producte von Factoren in endlicher Anzahl sind, wo jeder Factor eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty k_a\gamma^a$ hat, γ eine der Grössen $x-a$, $(x-a)\alpha_1,\dots(x-a)\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma$ ist. Jede dieser Entwickelungen convergirt innerhalb des Kreises mit dem Radius R, die Entwickelungen im Nenner verschwinden nicht innerhalb dieses Kreises. Es sei eine dieser letzteren Entwickelungen $\sum_0^\infty k'_a\gamma^a$. Wird

$$(7.)\qquad \frac{1}{\sum_0^\infty k'_a\gamma^a} = \frac{1}{k'_0}\sum_0^\infty\Big(-\sum_1^\infty\frac{k'_a}{k'_0}\gamma^a\Big)^a$$

gesetzt, so darf man, wenn $\sum_1^\infty \operatorname{Mod}\Big(\frac{k'_a}{k'_0}\Big)\operatorname{Mod}\gamma^a<1$ ist, nach Potenzen von γ ordnen, so dass

$$(8.)\qquad \frac{1}{\sum_0^\infty k'_a\gamma^a} = \sum_0^\infty \varkappa_a\gamma^a$$

entsteht. Da aber die Function $\frac{1}{\sum_0^\infty k'_a \gamma^a}$ einwerthig und stetig ist, wenn $\operatorname{Mod}\gamma < R$, so muss $\sum_0^\infty \varkappa_a \gamma^a$ convergiren und die Gleichung (8.) bestehen, wenn $\operatorname{Mod}\gamma < R$ ist. Wegen der unbedingten Convergenz der Potenzreihen (d. h. die Reihe der Moduln convergirt) muss daher auch $\sum_0^\infty \operatorname{Mod} k_a \operatorname{Mod}\gamma^a$ und $\sum_0^\infty \operatorname{Mod}\varkappa_a \operatorname{Mod}\gamma^a$ convergiren, wenn $\operatorname{Mod}\gamma < R$ ist. Daher hat $H(x-a)$ die Entwickelung

$$(9.)\qquad H(x-a) = \sum_0^\infty h_{\mathfrak{b}}(x-a)^{\mathfrak{b}},$$

wo $h_{\mathfrak{b}}$ eine ganze rationale Function von $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \dots \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma$ ist, die man aufstellen kann. Die Reihe (9.) convergirt noch, wenn in $h_{\mathfrak{b}}$ die Coefficienten durch ihre Moduln, die Grössen α_1, $\alpha_1\alpha_2$ bis $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma$ durch 1 und $x-a$ durch $\operatorname{Mod}(x-a) < R$ ersetzt sind. Aus den Entwickelungen (6.) und (9.) folgt nun

$$(10.)\qquad e^{G((x-a)^{-1})} H(x-a) = \sum_0^\infty K_{\mathfrak{c}}(x-a)^{\mathfrak{c}} + \sum_{-1}^{-\infty} K_{\mathfrak{c}}(x-a)^{\mathfrak{c}},$$

$$(11.)\qquad K_{\mathfrak{c}} = \sum_0^\infty{}_{\mathfrak{b}}\, g_{-\mathfrak{b}} h_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}, \qquad \mathfrak{c} = -\infty \cdots +\infty$$

wo die h mit negativem Zeiger gleich Null zu setzen sind. Und zwar müssen, nach den vorher gemachten Bemerkungen über die Convergenz der Reihen (6.) und (9.), in denen in g und h die Grössen durch ihre Moduln ersetzt sind, die Reihe (11.) und die beiden Potenzreihen in (10.) noch convergiren, wenn in den rationalen Functionen g und h die Grössen α_1, $\alpha_1\alpha_2, \dots \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma$ durch 1, die Coefficienten dieser Grössen durch ihre Moduln und $x-a$ durch $\operatorname{Mod}(x-a) < R$ ersetzt sind; (die Potenzreihe in (10.) mit negativen Exponenten ausser $x = a$). Hieraus folgt dann weiter, dass die Reihe (11.) für die Werthe der α, bei denen $\operatorname{Mod}\alpha = 1$ ist, in gleichem Grade convergirt, d. h. man kann zu einem solchen Stellenzeiger $\mathfrak{b}'$ übergehen, dass $\operatorname{Mod}\left(\sum_{\mathfrak{b}'+\varrho}^\infty g_{-\mathfrak{b}} h_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\right)$ $(\varrho = 1\dots\infty)$ für jene Werthe α unterhalb einer vorgeschriebenen, beliebig kleinen Grösse bleibt, und es folgt, dass jede der beiden Potenzreihen in (10.) für die Werthe α, bei denen $\operatorname{Mod}\alpha = 1$ ist und für die Werthe x, bei denen $\operatorname{Mod}(x-a) = R'$, wo $0 < R' < R$ ist, in gleichem Grade convergirt, d. h. man kann zu einem solchen Stellenzeiger $\mathfrak{c}'$ übergehen, dass $\operatorname{Mod}\left(\sum_{\mathfrak{c}'+\varrho}^\infty K_{\mathfrak{c}}(x-a)^{\mathfrak{c}}\right)$ und $\operatorname{Mod}\left(\sum_{-(\mathfrak{c}'+\varrho)}^{-\infty} K_{\mathfrak{c}}(x-a)^{\mathfrak{c}}\right)$

($\varrho = 1 \dots \infty$) für die angegebenen Werthe α und x unterhalb einer vorgeschriebenen, beliebig kleinen Grösse bleiben.

Da die Reihe (11.) $K_\mathfrak{c}$ für die Werthe α, bei denen $\operatorname{Mod}\alpha = 1$ ist, in gleichem Grade convergirt und ihre einzelnen Glieder stetige Functionen dieser Variabeln sind, so ist sie in Bezug auf dieselben Variabeln stetig. Man kann sie, weil sie in gleichem Grade convergirt, in den einzelnen Gliedern integriren. Bildet man

$$(12.)\qquad \int_1^{\prime\prime} K_\mathfrak{c}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma = \sum_0^\infty{}_\mathfrak{b}\int_1^{\prime} g_{-\mathfrak{b}}\,h_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma,$$

so sind die Functionen unter den Integralzeichen rechts ganze rationale Functionen von $\alpha_1^{m_1}, \alpha_2^{m_2}, \dots \alpha_\sigma^{\varrho_\sigma+m_\sigma}$, wo die m ganzzahlig sind; die Integrationen lassen sich daher ohne Weiteres ausführen. Die Reihe (12.) convergirt nun für die Variabeln α_1 bis $\alpha_{\sigma-1}$, deren $\operatorname{Mod}\alpha = 1$, in gleichem Grade und ist, da die einzelnen Glieder stetige Functionen dieser Variabeln sind, in Bezug auf dieselben Variabeln stetig. Durch eine weitere Integration ergiebt sich mittels derselben Betrachtungen

$$(13.)\qquad \int_1^{\prime} d\alpha_{\sigma-1}\int_1^{\prime} K_\mathfrak{c}\,\alpha_{\sigma-1}^{\varrho_{\sigma-1}}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma = \sum_0^\infty{}_\mathfrak{b}\int_1^{\prime} d\alpha_{\sigma-1}\int_1^{\prime\prime} g_{-\mathfrak{b}}\,h_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\,\alpha_{\sigma-1}^{\varrho_{\sigma-1}}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma,$$

wo die Reihe rechts in Bezug auf die Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{\sigma-2}$, bei denen $\operatorname{Mod}\alpha = 1$, in gleichem Grade convergirt und stetig ist. Man erhält also schliesslich

$$(14.)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_1^{\prime} d\alpha_1\int_1^{\prime} d\alpha_2 \dots \int_1^{\prime} K_\mathfrak{c}\,\alpha_1^{\varrho_1}\dots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma \\ \displaystyle = \sum_0^\infty{}_\mathfrak{b}\int_1^{\prime} d\alpha_1\int_1^{\prime} d\alpha_2 \dots \int_1^{\prime} g_{-\mathfrak{b}}\,h_{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\,\alpha_1^{\varrho_1}\dots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma. \end{cases}$$

In die Entwickelung (10.) wird nun $x - a = R'\beta$ eingesetzt, wodurch man die Entwickelung von $l(R'\beta)\,L(R'\beta)$ erhält. Jede der beiden Potenzreihen in (10.) convergirt für die Werthe der Variabeln $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\sigma$ und β, deren Modul gleich 1 ist, in gleichem Grade und ist in Bezug auf diese Variabeln stetig, da die einzelnen Glieder stetig sind. Man kann sie daher in den einzelnen Gliedern integriren und erhält

$$(15.)\qquad \int_1^{\prime} l(R'\beta)\,L(R'\beta)\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma = \sum_0^\infty\int_1^{\prime\prime} K_\mathfrak{c}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma\,(R'\beta)^\mathfrak{c} + \sum_{-1}^{-\infty}\int_1^{\prime} K_\mathfrak{c}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}d\alpha_\sigma\,(R'\beta)^\mathfrak{c}.$$

Jede der beiden Reihen in (15.) rechts convergirt für die Werthe α_1 bis $\alpha_{\sigma-1}$ und β, deren Modul gleich 1 ist, in gleichem Grade und ist in Bezug auf

diese Variabeln stetig, da die einzelnen Glieder stetig sind. Durch eine folgende Integration erhält man aus (15.) für das Integral

$$(16.)\quad \int_1' d\alpha_{\sigma-1}\int_1' l(R'\beta)\,L(R'\beta)\,\alpha_{\sigma-1}^{\varrho_{\sigma-1}-1}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma$$

die Entwickelung

$$(17.)\quad \sum_0^\infty \int_1' d\alpha_{\sigma-1}\int_1' K_\mathfrak{c}\,\alpha_{\sigma-1}^{\varrho_{\sigma-1}-1}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma\,(R'\beta)^\mathfrak{c}+\sum_{-1}^{-\infty}\int_1' d\alpha_{\sigma-1}\int_1' K_\mathfrak{c}\,\alpha_{\sigma-1}^{\varrho_{\sigma-1}-1}\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma\,(R'\beta)^\mathfrak{c},$$

wo sich mittels derselben Betrachtungen ergiebt, dass jede der beiden Reihen in (17.) für die Werthe der Variabeln α_1 bis $\alpha_{\sigma-2}$ und β, deren Modul gleich 1 ist, in gleichem Grade convergirt und, da die einzelnen Glieder stetig sind, in Bezug auf dieselben Variabeln stetig ist. Indem man so fortfährt, erhält man schliesslich für das Integral

$$(18.)\quad \int_1' d\beta\int_1' d\alpha_1\int_1' d\alpha_2\ldots\int_1' l(R'\beta)\,L(R'\beta)\,\beta^{-\mathfrak{a}-1}\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma$$

die Entwickelung

$$(19.)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty \int_1' d\beta\int_1' d\alpha_1\ldots\int_1' K_\mathfrak{c}\,\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma\,\beta^{-\mathfrak{a}-1}(R'\beta)^\mathfrak{c} \\ +\sum_{-1}^{-\infty}\int_1' d\beta\int_1' d\alpha_1\ldots\int_1' K_\mathfrak{c}\,\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma\,\beta^{-\mathfrak{a}-1}(R'\beta)^\mathfrak{c}. \end{cases}$$

Hierbei fallen alle Integrale aus, in denen die $\mathfrak{c}$ von $\mathfrak{a}$ verschieden sind, und man kann daher statt des Integrales (18.) auch setzen

$$(20.)\quad \int' d\alpha_1\ldots\int_1' d\alpha_\sigma\int_1' l(R'\beta)\,L(R'\beta)\,\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,\beta^{-\mathfrak{a}-1}\,d\beta.$$

Für $c'_\mathfrak{a}$ (4.) ergiebt sich nun aus (18.), (19.) und (14.)

$$(21.)\quad \begin{cases} c'_\mathfrak{a} = \int_1' d\alpha_1\int_1' d\alpha_2\ldots\int_1' K_\mathfrak{a}\,\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma \\ \quad = \sum_0^\infty {}_\mathfrak{b}\int_1' d\alpha_1\int_1' d\alpha_2\ldots\int_1' g_{-\mathfrak{b}}\,h_{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}}\,\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma. \end{cases}$$

$g_{-\mathfrak{b}}h_{\mathfrak{b}+\mathfrak{a}}\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}$ ist eine ganze rationale Function von $\alpha_1^{\varrho_1+m_1}$ bis $\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma+m_\sigma}$, wo die m ganze Zahlen sind. Nach Ausführung der Integrationen wird jedes Glied in der Reihe (21.) ein rationaler Ausdruck von Constanten, die in den bei (52.) der No. 1 genannten Ausdrücken vorkommen und von den Constanten ϱ_1 bis ϱ_σ, $e^{2\pi i\varrho_1}$ bis $e^{2\pi i\varrho_\sigma}$. $c'_\mathfrak{a}$ ist demnach vermittelst (21.) durch eine einfach unendliche Reihe dieser Ausdrücke entwickelt und jedes einzelne

Glied dieser Reihe kann man aufstellen. Durch Addition der Entwickelungen von Grössen v' (2.) erhält man die Entwickelung der im Anfange dieser No. betrachteten Function $e^{-w_k}\varphi_{ab}(x)$. Der Coefficient c_a in dieser Entwickelung stellt sich demnach durch eine *einfach unendliche Reihe rationaler Ausdrücke* der vorhin bezeichneten Constanten dar, von welcher Reihe man jedes einzelne Glied aufstellen kann. In der folgenden No. (IV*e*.) wird gezeigt, wie man den Werth von c_a mit beliebig vorherbestimmter Annäherung berechnen kann.

3.

Nachdem in No. 1 die Darstellung der Integrale der Differentialgleichung $F_m(y,x) = 0$ No. 1 (1.) bei einem singulären Punkte $x = a$ gegeben ist und in No. 2 die Ausdrücke für die Coefficienten in den Entwickelungen dieser Integrale ermittelt sind, wird jetzt gezeigt, wie man aus jener Darstellung der Integrale Entwickelungen herleitet, welche die Werthe der Integrale mit beliebig vorgeschriebener Annäherung geben, wodurch zugleich die Werthe der genannten Coefficienten mit beliebiger Annäherung erhalten werden.

I. Die Function $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{ab}(x)$ No. 1 (21.) ist als Summe von Integralen U No. 1 (30.) gegeben. Ein solches Integral U wird vermittelst des bestimmten Integrales No. 1 (51.) dargestellt, worin die Functionen $(x-a)^r\psi(x-a)$ die Ausdrücke No. 1 (52.) erhalten. Um die Exponenten r in diesen Ausdrücken zu bilden, wird bei den Grössen μ_{kb} der Exponent $r_{kb}-b+1$, bei $(x-a)^{r_a}\chi_{ab}$ der Exponent r_a, bei $(x-a)^{-1}$ der Exponent -1 genommen. Dadurch erhält man für U den Ausdruck

$$(1.)\qquad U = (x-a)^{r_a+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\psi_0(x-a)S,$$

wo

$$(2.)\qquad \psi_0(x-a) = \frac{\varkappa(x-a)^{-r_{01}}\mu_{01}}{(e^{\varrho_1 2\pi i}-1)\dots(e^{\varrho_\sigma 2\pi i}-1)}$$

ist, $\psi_0(x-a)$ daher eine Darstellung der Form $e^{w_0}\sum_0^\infty c_a(x-a)^a$ hat, worin c_0 von Null verschieden ist, S ein bestimmtes Integral wie S in No. 1 (51.). Also wird

$$(3.)\qquad \begin{cases} U = (x-a)^{r_a+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\psi_0(x-a)S, \\ S = \int_1^{\prime} d\alpha_1 \int_1^{\prime} d\alpha_2 \dots \int_1^{\prime} \psi_1((x-a)\alpha_1)\dots\psi_\sigma((x-a)\alpha_1\dots\alpha_\sigma)\,\alpha_1^{\varrho_1}\dots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma. \end{cases}$$

R sei der Radius eines Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt, innerhalb dessen Peripherie die zur Darstellung der Functionen $\psi(x-a)$ unter der Form No. 1 (52.) angewandten Grössen $\eta(x)$ und $\omega(x)$ einwerthig und stetig bleiben und nicht verschwinden, $\chi_{ab}(x)$ einwerthig und stetig ist, so gilt die Darstellung (3.) für die Punkte x innerhalb dieses Kreises, abgesehen von $x=a$. Die Function $\psi_1((x-a)\alpha_1)\dots\psi_\sigma((x-a)\alpha_1\dots\alpha_\sigma)$ erhält nun die Entwickelung

$$(4.)\quad \begin{cases} \psi_1((x-a)\alpha_1)\,\psi_2((x-a)\alpha_1\alpha_2)\dots\psi_\sigma((x-a)\alpha_1\dots\alpha_\sigma) \\ \quad = e^{\mathfrak{P}((x-a)^{-1})}\,Q(x-a) = P((x-a)^{-1})\,Q(x-a). \end{cases}$$

$\mathfrak{P}((x-a)^{-1})$ entsteht durch Summation der Grössen τ in e^τ bei den ψ No. 1 (52.), ist eine ganze rationale Function mit dem absoluten Gliede gleich Null von $((x-a)\alpha_1)^{-1}, \dots ((x-a)\alpha_1\dots\alpha_\sigma)^{-1}$. $P((x-a)^{-1})$ hat die Entwickelung

$$(5.)\quad e^{\mathfrak{P}((x-a)^{-1})} = P((x-a)^{-1}) = \sum_0^\infty p_{-b}(x-a)^{-b},$$

wo p_{-b} eine ganze rationale Function der Grössen $\alpha_1^{-1}, \dots (\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma)^{-1}$ ist, die man aufstellen kann. Diese Reihe convergirt noch, wenn die Coefficienten in p_{-b} durch ihre Moduln, die Grössen α durch 1 ersetzt sind.

$Q(x-a)$ ist das Product der Grössen $\frac{\xi}{\zeta}$ bei den ψ No. 1 (52.), wo ξ und ζ hervorgehen aus den Functionen $\eta(x)$ und $\omega(x)$ bei den μ, aus dem Werthe 1 bei $(x-a)^{-1}$ und aus $\chi_{ab}(x)$. Jede Grösse ξ, ζ hat eine Entwickelung der Form $\sum_0^\infty k_a\gamma^a$, γ ist eine der Grössen $(x-a)\alpha_1, \dots (x-a)\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma$. Ist die Entwickelung einer Grösse ζ $\sum_0^\infty k'_a\gamma^a$, so erhält man, da dieselbe innerhalb des Kreises mit dem Radius R nicht verschwindet, $\frac{1}{\sum_0^\infty k'_a\gamma^a}$ innerhalb dieses Kreises einwerthig und stetig. Setzt man daher

$$(6.)\quad \frac{1}{\sum_0^\infty k'_a\gamma^a} = \frac{1}{k'_0}\sum_0^\infty\left(-\sum_1^\infty\frac{k'_a}{k'_0}\gamma^a\right)^a = \sum_0^\infty c_a\gamma^a$$

für $\sum_1^\infty \operatorname{Mod}\frac{k'_a}{k'_0}\operatorname{Mod}\gamma^a < 1$, so muss die Reihe $\sum_0^\infty c_a\gamma^a$ convergiren, und die Gleichung (6.) bestehen, so lange $\operatorname{Mod}\gamma < R$ ist. Daher hat $Q(x-a)$ für $\operatorname{Mod}(x-a) < R$ die Entwickelung

$$(7.)\quad Q(x-a) = \sum_0^\infty q_b(x-a)^b,$$

wo q_b eine ganze rationale Function von $\alpha_1, \alpha_1\alpha_2, \dots \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma$, die man

aufstellen kann, und die Reihe noch convergirt, wenn die Coefficienten in φ_a durch ihre Moduln, die α durch 1 ersetzt sind. Weil die hier betrachtete Function $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}\varphi_{ab}(x)$ durch eine Summe von Ausdrücken (3.) dargestellt wird, ist die ganze Zahl $\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}$ in den Exponenten $r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}$ in No. 1 (21.) aufgenommen worden.

Die Reihe $P((x-a)^{-1})$ werde in zwei Theile getheilt P' und P'', wo P' die Glieder der Reihe P bis zu einem gewissen Stellenzeiger enthält, ebenso werde die Reihe $Q(x-a)$ in zwei Theile getheilt Q' und Q'', wo Q' die Glieder von Q bis zu einem bestimmten Stellenzeiger enthält, so dass

$$(8.)\qquad PQ = P'Q'+(P'Q''+P''Q'+P''Q'').$$

Für die Werthe x in einem Gebiete innerhalb des Kreises mit dem Radius R, welches $x=a$ nicht enthält, und für die Werthe der α, deren Modul gleich 1 ist, sei $\operatorname{Mod} P \leqq \mathfrak{A}$, $\operatorname{Mod} Q\leqq \mathfrak{B}$, $\operatorname{Mod} P''\leqq \varkappa_1$, $\operatorname{Mod} Q''\leqq \varkappa_2$, so dass $\operatorname{Mod} P'\leqq \mathfrak{A}+\varkappa_1$ und $\operatorname{Mod} Q'\leqq \mathfrak{B}+\varkappa_2$ und

$$(9.)\qquad \operatorname{Mod}(P'Q''+P''Q'+P''Q'')\leqq (\mathfrak{A}+\varkappa_1)\varkappa_2+(\mathfrak{B}+\varkappa_2)\varkappa_1+\varkappa_1\varkappa_2 = \omega.$$

$P'Q'$ ist eine ganze rationale Function von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ mit Coefficienten, die ganze rationale Functionen von α_1 bis α_σ und α_1^{-1} bis α_σ^{-1} sind, so dass die Integrationen in dem Integral

$$(10.)\qquad \int_1^{\prime} d\alpha_1\ldots\int_1^{\prime} P'Q'\,\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma$$

ohne Weiteres ausgeführt werden können, wodurch man ***eine ganze rationale Function von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ erhält, deren Coefficienten rationale Functionen gegebener Constanten sind.*** Das Integral

$$(11.)\qquad \int_1^{\prime} d\alpha_1\ldots\int_1^{\prime}[\psi_1((x-a)\alpha_1)\ldots\psi_\sigma((x-a)\alpha_1\ldots\alpha_\sigma)-P'Q']\,\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma$$

ist gemäss (8.) gleich dem Integral

$$(12.)\qquad \int_1^{\prime} d\alpha_1\ldots\int_1^{\prime}(P'Q''+P''Q'+P''Q'')\,\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma.$$

Führt man in (12.) bei der jedesmaligen Integration für α ein $e^{i\theta}$, $0\leqq\theta\leqq 2\pi$, so erhält man gemäss (9.), wenn bei $\varrho_\iota=p_\iota+q_\iota i$ für $q_\iota<0$ $\eta_\iota=e^{-q_\iota 2\pi}$ und für $q\geqq 0$ $\eta_\iota=1$ gesetzt wird,

$$(13.)\qquad \begin{cases} \operatorname{Mod}\left\{\int_1^{\prime}(P'Q''+P''Q'+P''Q'')\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma\right\} \\ =\operatorname{Mod}\left\{i\int_0^{2\pi}(P'Q''+P''Q'+P''Q'')\,e^{i(\varrho_\sigma+1)\theta_\sigma}d\theta_\sigma\right\}\leqq \eta_\sigma\,\omega\,2\pi, \end{cases}$$

$$(14.)\left\{\begin{aligned} &\operatorname{Mod}\left\{\int_1^{r} d\alpha_{\sigma-1}\int_1^{r}(P'Q''+\cdots+P''Q'')\,\alpha_{\sigma-1}^{\varrho_{\sigma-1}}\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}d\alpha_\sigma\right\}\\ &=\operatorname{Mod}\left\{i\int_0^{2\pi}\int_1^{r}(P'Q''+\cdots+P''Q'')\,\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma e^{i(\varrho_{\sigma-1}+1)\theta_{\sigma-1}}d\theta_{\sigma-1}\right\}\leqq\eta_{\sigma-1}\eta_\sigma\omega(2\pi)^2\end{aligned}\right.$$

u. s. w. ***daher den Modul des Integrales*** (11.) ***gleich oder kleiner als*** $\eta_1\eta_2\ldots\eta_\sigma\omega(2\pi)^\sigma$. Es kommt nun darauf an zu zeigen, wie man ***die Werthe*** $\mathfrak{A}$ ***und*** $\mathfrak{B}$ ***ermittelt,*** und wie man die Stellenzeiger, von welchen an die Reihen P'' und Q'' beginnen, so bestimmen kann, dass x_1 ***und*** x_2 ***vorgeschriebene beliebig kleine Grössen werden.*** Die hierzu dienenden Hülfsmittel werden in den Abtheilungen II und III entwickelt.

II. *a.*) Die Potenzreihe

$$(15.)\qquad \sum_0^\infty c_\alpha\xi^\alpha = \mathfrak{P}(\xi)$$

habe den Radius des Convergenzkreises $> R$. Alsdann ist, wenn $\xi = Re^{i\theta}$ gesetzt wird,

$$(16.)\qquad c_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\mathfrak{P}(\xi)\,\xi^{-\alpha-1}d\xi = \frac{1}{2\pi R^\alpha}\int_0^{2\pi}\mathfrak{P}(Re^{i\theta})\,e^{-i\alpha\theta}d\theta.$$

Hieraus folgt, wenn M eine positive Grösse ist gleich oder grösser als das Maximum des Moduls von $\mathfrak{P}(\xi)$ für $\operatorname{Mod}\xi = R$, dass

$$(17.)\qquad \operatorname{Mod} c_\alpha \leqq \frac{M}{R^\alpha}$$

ist. Daher ergiebt sich für Werthe ξ, deren Modul gleich $R' < R$ ist,

$$(18.)\qquad \operatorname{Mod}\sum_\nu^\infty c_\alpha\xi^\alpha \leqq M\left(\frac{R'}{R}\right)^\nu\frac{1}{1-\frac{R'}{R}},$$

und $\left(\frac{R'}{R}\right)^\nu$ wird für hinreichend grosse Werthe von ν beliebig klein, so dass man, ***wenn M bekannt ist,*** durch passende Wahl von ν den Rest der Reihe für $\operatorname{Mod}\xi \leqq R'$ dem Modul nach kleiner machen kann als eine ***vorgeschriebene beliebig kleine*** Grösse.

Bei der Potenzreihe

$$(19.)\qquad \frac{d^l}{d\xi^l}\sum_0^\infty c_\alpha\xi^\alpha$$

erhält man vermittelst (17.) als Grösse, welche gleich oder grösser ist als das Maximum des Moduls dieser Reihe für $\operatorname{Mod}(\xi) \leqq R_1 < R$,

$$(20.)\ \operatorname{Mod}\left\{\frac{d^l}{d\xi^l}\sum_0^\infty c_\alpha\xi^\alpha\right\} \leqq M\frac{d^l}{dR_1^l}\sum_0^\infty\left(\frac{R_1}{R}\right)^\alpha = M\frac{d^l}{dR_1^l}\frac{1}{1-\frac{R_1}{R}} = 1.2\ldots l\frac{MR}{(R-R_1)^{l+1}}.$$

Es kommt also zur Anwendung des Vorhergehenden darauf an, die Grösse M zu ermitteln.

b.) Die Reihenentwickelung $y = (x-a)^r \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ soll einer homogenen, linearen Differentialgleichung mit *rationalen* Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, die bei $x = a$ den charakteristischen Index gleich Null hat, genügen. Der Punkt a kann auch nicht singulär sein. Diese Reihe convergirt in dem Bezirke von $x = a$ (vgl. Abh. B. 87 No. 1). r ist Wurzel der Exponentengleichung bei $x = a$, wenn c_0 von Null verschieden ist. Es soll nun r Wurzel der Exponentengleichung sein und dabei auch der Fall zugelassen werden, wo c_0 oder noch einige folgende Coefficienten gleich Null sind. *Für die Potenzreihe $\sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$ soll eine positive Grösse ermittelt werden gleich oder grösser als der Modul der Reihe für Werthe x, bei denen $\text{Mod}(x-a) = R$ ist, wenn R kleiner als der Radius des Bezirkes von $x = a$ ist.*

Wird $y = (x-a)^r u$ in die Differentialgleichung eingesetzt und die Differentialgleichung für u hergeleitet, die rationale Coefficienten und bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null hat, so sei dieselbe

$$(21.)\qquad \frac{d^\varrho u}{dx^\varrho} + P_1 \frac{d^{\varrho-1} u}{dx^{\varrho-1}} + \cdots + P_\varrho u = 0.$$

Der Bezirk von $x = a$ bei derselben ist nicht kleiner als der bei der ursprünglichen Differentialgleichung und daher auch letzterer nicht kleiner als jener. Nun wird

$$(22.)\qquad P_\alpha (x-a)^\alpha = Q_\alpha = Q_\alpha(a) + (x-a)\, Q'_\alpha(x)$$

gesetzt, so ist $Q'_\alpha(x)$ innerhalb des Bezirkes von $x = a$ einwerthig und stetig. $Q_\varrho(a)$, als Function von r betrachtet gleich Null gesetzt, ist die Exponentengleichung der ursprünglichen Differentialgleichung und hat die Grösse r in $(x-a)^r u$ zur Wurzel. Die Differentialgleichung (21.) werde auf die Form gebracht

$$(23.)\qquad \begin{cases} (x-a)^{\varrho-1} \dfrac{d^\varrho u}{dx^\varrho} + Q_1(a)\,(x-a)^{\varrho-2} \dfrac{d^{\varrho-1} u}{dx^{\varrho-1}} + \cdots + Q_{\varrho-1}(a) \dfrac{du}{dx} \\ = -(x-a)^{\varrho-1} Q'_1(x) \dfrac{d^{\varrho-1} u}{dx^{\varrho-1}} - (x-a)^{\varrho-2} Q'_2(x) \dfrac{d^{\varrho-2} u}{dx^{\varrho-2}} - \cdots - Q'_\varrho(x)\, u. \end{cases}$$

Soll nun dieser Differentialgleichung die Entwickelung

$$(24.)\qquad \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$$

genügen, wo auch c_0 und folgende Coefficienten gleich Null sein dürfen,

so ergiebt sich durch Gleichsetzen der Coefficienten von $(x-a)^k$ auf beiden Seiten der Differentialgleichung (23.), dass die c_α folgende Relation für $k \geqq 0$ erfüllen:

$$(25.)\quad \begin{cases} \{(k+1)k(k-1)\dots(k-\varrho+2)+Q_1(a)(k+1)k\dots(k-\varrho+3)+\cdots \\ \cdots+Q_{\varrho-1}(a)(k+1)\}\,c_{k+1} = A_{k0}c_k+A_{k1}c_{k-1}+\cdots+A_{kk}c_0, \end{cases}$$

wo die Grössen A ganze rationale Ausdrücke der Coefficienten in den Reihenentwickelungen von $-(x-a)^{\varrho-\alpha}Q'_\alpha(x)$ mit positiven ganzzahligen nur von ϱ und k abhängenden Coefficienten sind.

Es werden statt der Reihenentwickelungen der Factoren von $\frac{d^{\varrho-\alpha}u}{dx^{\varrho-\alpha}}$ auf der rechten Seite von (23.) andere gebildet, deren Coefficienten positiv und gleich oder grösser als die Moduln der entsprechenden Coefficienten in den ursprünglichen Reihen sind. M_0 sei eine positive Grösse >0 gleich oder grösser als das Maximum der Moduln der Functionen $Q'_\alpha(x)(\alpha=1\dots\varrho)$ auf dem Kreise um $x=a$ als Mittelpunkt mit dem Radius R_0, der kleiner ist, als der Radius des Bezirkes von $x=a$. Dann ist in der Reihenentwickelung von $Q'_\alpha(x)$ der Form (15.), wo $\xi=x-a$ ist, Mod $c_\alpha \leqq \frac{M_0}{R_0^\alpha}$ (17.).

Nun werde die Differentialgleichung gebildet:

$$(26.)\quad \begin{cases} \gamma(x-a)^{\varrho-1}\frac{d^\varrho v}{dx^\varrho}+\gamma(x-a)^{\varrho-2}\frac{d^{\varrho-1}v}{dx^{\varrho-1}}+\cdots+\gamma\frac{dv}{dx} \\ = \frac{M_0(x-a)^{\varrho-1}}{1-\frac{x-a}{R_0}}\frac{d^{\varrho-1}v}{dx^{\varrho-1}}+\frac{M_0(x-a)^{\varrho-2}}{1-\frac{x-a}{R_0}}\frac{d^{\varrho-2}v}{dx^{\varrho-2}}+\cdots+\frac{M_0}{1-\frac{x-a}{R_0}}v, \end{cases}$$

worin γ reell und grösser als Null ist.

Wenn man in diese Differentialgleichung die Reihenentwickelung

$$(27.)\quad \sum_0^\infty g_\alpha(x-a)^\alpha$$

einsetzt, so ergiebt sich für $k \geqq 0$:

$$(28.)\quad \begin{cases} \gamma\{(k+1)k\dots(k-\varrho+2)+(k+1)k\dots(k-\varrho+3)+\cdots+k+1\}\,g_{k+1} \\ = B_{k0}g_k+B_{k1}g_{k-1}+\cdots+B_{kk}g_0. \end{cases}$$

Die Grössen B gehen aus den Grössen A (25.) hervor, wenn man in diesen an Stelle der Coefficienten in den Reihenentwickelungen von $-(x-a)^{\varrho-\alpha}Q'_\alpha(x)$ die Coefficienten derselben Potenzen in den Reihenentwickelungen von $(x-a)^{\varrho-\alpha}\frac{M_0}{1-\frac{x-a}{R_0}}$ setzt. Daher sind die Grössen B positiv >0, und

$B_{\varkappa\beta} \geqq \operatorname{Mod} A_{\varkappa\beta}$. Der Coefficient von g_{k+1} in (28.) ist für die ganzen Zahlen $k \geqq 0$ von Null verschieden. Damit von einer bestimmten positiven ganzen Zahl k' an für $k \geqq k'$

$$(29.)\quad \begin{cases} \operatorname{Mod}[(k+1k)\ldots(k-\varrho+2)+Q_1(a)(k+1)k\ldots(k-\varrho+3)+\cdots+Q_{\varrho-1}(a)(k+1)] \\ \qquad \geqq \gamma[(k+1)k\ldots(k-\varrho+2)+(k+1)k\ldots(k-\varrho+3)+\cdots+k+1] \end{cases}$$

ist, muss γ die Relation $0<\gamma<1$ erfüllen. Die Coefficienten g_α werden der Recursionsformel (28.) gemäss alle positiv, wenn g_0 positiv ist, und es ergiebt sich aus (25.), (28.) und (29.), dass, wenn $g_\alpha \geqq \operatorname{Mod} c_\alpha$ für $\alpha = 0\ldots k'-1$, allgemein

$$(30.)\qquad g_\alpha \geqq \operatorname{Mod} c_\alpha \quad \alpha = 0\ldots\infty$$

sein muss. g_α stellt sich gemäss (28.) unter der Form $\mathfrak{B}_\alpha g_0$ dar, wo $\mathfrak{B}_\alpha$ eine positive Grösse >0 ist. Es ist also g_0 so zu bestimmen, dass

$$(31.)\qquad g_0\mathfrak{B}_\alpha \geqq \operatorname{Mod} c_\alpha \quad \alpha = 0\ldots k'-1$$

wird.

Die Reihe (27.) ist ein Integral der Differentialgleichung (26.), wenn sie der Differentialgleichung

$$(32.)\quad \begin{cases} \left(1-\frac{x-a}{R_0}\right)\left\{(x-a)^{\varrho-1}\frac{d^\varrho v}{dx^\varrho}+(x-a)^{\varrho-2}\frac{d^{\varrho-1}v}{dx^{\varrho-1}}+\cdots+\frac{dv}{dx}\right\} \\ \quad = \frac{M_0}{\gamma}\left\{(x-a)^{\varrho-1}\frac{d^{\varrho-1}v}{dx^{\varrho-1}}+(x-a)^{\varrho-2}\frac{d^{\varrho-2}v}{dx^{\varrho-2}}+\cdots+v\right\} \end{cases}$$

genügt. Setzt man hier (27.) ein, so ergiebt sich für $k \geqq 0$

$$(33.)\quad \begin{cases} \left\{(k+1)k\ldots(k-\varrho+2)+(k+1)k\ldots(k-\varrho+3)+\cdots+k+1\right\}g_{k+1} \\ = \Big[\frac{1}{R_0}\left\{k(k-1)\ldots(k-\varrho+1)+k(k-1)\ldots(k-\varrho+2)+\cdots+k\right\} \\ \quad + \frac{M_0}{\gamma}\left\{k(k-1)\ldots(k-\varrho+2)+k\ldots(k-\varrho+3)+\cdots+1\right\}\Big]g_k, \end{cases}$$

woraus

$$(34.)\qquad g_{k+1} = \left\{\frac{1}{R_0}\,\frac{k(k-1)\ldots(k-\varrho+1)+\cdots+k}{(k+1)k\ldots(k-\varrho+2)+\cdots+k+1}+\frac{M_0}{\gamma}\,\frac{1}{k+1}\right\}g_k.$$

Hieraus folgt

$$(35.)\qquad \lim_{k=\infty}\frac{g_{k+1}}{g_k} = \frac{1}{R_0}.$$

Also giebt es eine durch (34.) bestimmte Reihe der Form (27.), die für $\operatorname{Mod}(x-a) < R_0$ convergirt und die Differentialgleichung (32.) und daher auch (26.) erfüllt. g_α wird mittels der Formel (34.) unter der Form $\mathfrak{B}_\alpha g_0$

dargestellt und g_0 gemäss (31.) bestimmt, dann ist die Relation (30.) erfüllt. (Hierdurch wird bewiesen, dass die Reihe (24.), deren Coefficienten die Relation (25.) erfüllen, für $\text{Mod}(x-a) < R_0$ convergirt. Vgl. hiermit den Convergenzbeweis für die Reihe (24.) in der Abh. des Herrn *Fuchs* Bd. 66 dieses Journals p. 148, von dem sich der vorstehende hauptsächlich dadurch unterscheidet, dass in (26.) noch das Glied $\gamma(x-a)^{\varrho-1}\frac{d^\varrho v}{dx^\varrho}$ aufgenommen ist, wo $0<\gamma<1$, wodurch man direct zum Beweise der Convergenz für die Werthe x innerhalb des Kreises mit dem Radius R_0 gelangt; Abh. Bd. 87 p. 289.)

Der Coefficient von $\frac{1}{R_0}$ in (34.) ist kleiner als 1. Bestimmt man daher g'_α vermittelst der Relation

$$(36.) \qquad g'_{k+1} = \left\{\frac{1}{R_0}+\frac{M_0}{\gamma}\frac{1}{k+1}\right\}g'_k$$

und setzt $g'_0 = g_0$, so ist $g'_\alpha \geqq g_\alpha$ und $\lim\limits_{k=\infty}\frac{g'_{k+1}}{g'_k} = \frac{1}{R_0}$, so dass die Reihe $\sum\limits_0^\infty g'_\alpha(x-a)^\alpha = v'$ convergirt für $\text{Mod}(x-a) < R_0$. Bringt man die Relation (36.) auf die Form

$$(37.) \qquad (k+1)g'_{k+1} = \left\{\frac{k}{R_0}+\frac{1}{R_0}+\frac{M_0}{\gamma}\right\}g'_k,$$

so ergiebt sich, dass die Reihe $v' = \sum\limits_0^\infty g'_\alpha(x-a)^\alpha$ die Differentialgleichung erfüllt

$$(38.) \qquad \left(1-\frac{x-a}{R_0}\right)\frac{dv'}{dx} = \left(\frac{1}{R_0}+\frac{M_0}{\gamma}\right)v'.$$

Aus dieser folgt

$$(39.) \qquad v' = g_0 e^{-\left(1+\frac{M_0R_0}{\gamma}\right)\log\left(1-\frac{x-a}{R_0}\right)} = g_0\left(1-\frac{x-a}{R_0}\right)^{-\left(1+\frac{M_0R_0}{\gamma}\right)},$$

wo der Werth von $\log\left(1-\frac{x-a}{R_0}\right)$ für $x=a$ gleich Null zu nehmen ist.

Setzt man in (39.) $x-a$ gleich $\text{Mod}(x-a) = R$, *so erhält man für den Modul der Reihe* (24.) *die Relation*

$$(40.) \qquad \text{Mod}\left\{\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha\right\} \leqq g_0\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{-\left(1+\frac{M_0R_0}{\gamma}\right)},$$

wenn $x-a$ Werthe hat, deren Modul gleich oder kleiner als $R<R_0$ ist. In dieser Formel ist also g_0 durch die Relation (31.) bestimmt, worin $\mathfrak{B}_\alpha$ mittels (34.) gebildet wird; M_0 ist eine positive Grösse >0 gleich oder grösser als das Maximum der Moduln der Functionen $Q'_\alpha(x)$ $(\alpha = 1\ldots\varrho)$ (22.)

auf dem Kreise um $x=a$ als Mittelpunkt mit dem Radius R_0, der kleiner ist als der des Bezirkes von $x=a$; γ ist eine reelle Grösse, welche die Relation $0<\gamma<1$ erfüllt.

Man kann hier nun R_0 so wählen, dass ein Werth von M_0 sich ohne Weiteres darbietet, da die Coefficienten P der Differentialgleichung* (21.) *rational sind.

Es ergiebt sich aus (22.), dass die Grössen $Q'_\alpha(x)$ selbst rationale Functionen von x sind, die man bilden kann; dieselben bleiben innerhalb des Bezirkes von $x=a$ stetig. Eine solche Function sei auf die Form $\frac{\varphi}{\psi}$ gebracht, wo φ und ψ ganze rationale Functionen von x sind und ψ für $x=a$ nicht verschwindet. φ sei gleich $\sum_0^m \alpha_s(x-a)^s$, ψ gleich $\sum_0^n \beta_s(x-a)^s$. ***Dann wird $R_0>0$ so gewählt,*** dass

$$(41.)\qquad \operatorname{Mod}\beta_0-\sum_1^n \operatorname{Mod}\beta_s R_0^s>0$$

ist und R_0 ein und dieselbe Grösse bleibt bei den verschiedenen Functionen $Q'_\alpha(x)$ $(\alpha=1\dots\varrho)$.

Nun ist

$$(42.)\qquad \begin{cases} \operatorname{Mod}\psi \geqq \operatorname{Mod}\left[\operatorname{Mod}\beta_0-\operatorname{Mod}\left(\sum_1^n \beta_s(x-a)^s\right)\right] \\ \qquad\qquad \geqq \operatorname{Mod}\beta_0-\sum_1^n \operatorname{Mod}\beta_s \operatorname{Mod}(x-a)^s \end{cases}$$

für $\operatorname{Mod}(x-a)\leqq R_0$. Die Functionen ψ verschwinden also nicht für $\operatorname{Mod}(x-a)\leqq R_0$, so dass R_0 kleiner ist als der Radius des Bezirkes von $x=a$ und man kann ***für M_0 einen Werth nehmen gleich oder grösser als der grösste der ϱ Werthe des Ausdruckes***

$$(43.)\qquad \frac{\sum_0^m \operatorname{Mod}\alpha_s R_0^s}{\operatorname{Mod}\beta_0-\sum_1^n \operatorname{Mod}\beta_s R_0^s},$$

welche sich auf die verschiedenen Functionen $Q'_\alpha(x)$ $(\alpha=1\dots\varrho)$ beziehen.

Die im Endlichen liegenden singulären Punkte der ursprünglichen Differentialgleichung in *b.*), ausser a, sind dieselben in (21.), und seien die Punkte a_1 bis a_λ. Dann hat ψ die Form $(x-a_1)^{n_1}\dots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}$, wo die Exponenten positive ganze Zahlen (incl. 0) sind. ***Wenn a_1 bis a_λ bekannt sind, so kann man für R_0 irgend einen Radius kleiner als der des Bezirkes von $x=a$ nehmen und aus den rationalen Coefficienten P einen Werth für M_0 herleiten.*** Es wird

$\operatorname{Mod}\psi \geqq (\operatorname{Mod}(a_1-a)-R_0)^{n_1}\dots(\operatorname{Mod}(a_\lambda-a)-R_0)^{n_\lambda}$ für $\operatorname{Mod}(x-a)=R_0$, so dass man für M_0 einen Werth gleich oder grösser als der grösste der ϱ Werthe des Ausdruckes

$$(44.)\qquad \frac{\sum_0^\infty \operatorname{Mod} \alpha_s R_0^s}{(\operatorname{Mod}(a_1-a)-R_0)^{n_1}\dots(\operatorname{Mod}(a_\lambda-a)-R_0)^{n_\lambda}}$$

nehmen kann, welche bei den verschiedenen Functionen $Q'_\alpha(x)$ $(\alpha=1\dots\varrho)$ vorkommen.

Was die positive ganze Zahl k' angeht, die durch die Relation (29.) definirt ist, so kann man für dieselbe auf folgende Weise einen Werth ermitteln. Es sei von den Grössen $\operatorname{Mod}Q_1(a)$ bis $\operatorname{Mod}Q_{\varrho-1}(a)$ die grösste q, dann gilt für die positiven ganzen Zahlen k die Relation

$$(45.)\qquad \begin{cases} \operatorname{Mod}[(k+1)k\dots(k-\varrho+2)+Q_1(a)(k+1)k\dots(k-\varrho+3)+\cdots \\ \qquad \cdots+Q_{\varrho-1}(a)(k+1)] \geqq (k+1)k\dots(k-\varrho+2) \\ \qquad -q\{(k+1)k\dots(k-\varrho+3)+\cdots+k+1\}, \end{cases}$$

sobald die zweite Seite positiv ist (vgl. (42.)). Zur Erfüllung der Relation (29.) ist alsdann hinreichend, dass man eine positive ganze Zahl $k=k'$ nimmt, von welcher an

$$(46.)\qquad (1-\gamma)(k+1)k\dots(k-\varrho+2)-(q+\gamma)\{(k+1)k\dots(k-\varrho+3)+\cdots+k+1\}>0$$

bleibt. Hierzu muss $k'>\varrho-2$ sein. Setzt man $k=\varrho-1+k_1$, so ist die ganze Zahl $k_1 \geqq 0$ so zu bestimmen, dass von dieser Zahl an

$$(47.)\qquad \frac{1-\gamma}{q+\gamma} > \left\{\frac{1}{k_1+1}+\frac{1}{(k_1+1)(k_1+2)}+\cdots+\frac{1}{(k_1+1)(k_1+2)\dots(k_1+\varrho-1)}\right\}$$

bleibt. Wird die niedrigste ganze Zahl $k_1 \geqq 0$, welche der Relation (47.) genügt, durch K bezeichnet, so ist für k' ein Werth $\varrho-1+K$.

Von der Grösse γ hängt k' und $\mathfrak{B}_\alpha$ (31.), welches mittels (34.) zu bilden ist, ab, demnach der Werth von g_0. Nimmt γ ab, so nimmt allgemein genommen k' ab und es wächst $\mathfrak{B}_\alpha$, daher nimmt g_0 ab; wächst γ, so wächst im Allgemeinen k', es nimmt $\mathfrak{B}_\alpha$ ab, daher wächst g_0. Wenn der eine der beiden Factoren g_0 und $\left(1-\frac{R}{R_0}\right)^{-\left(1+\frac{M_0 R_0}{\gamma}\right)}$ in (40.) durch Aenderung von γ wächst, so nimmt daher der andere ab und umgekehrt. Man kann deshalb zweckmässig $\gamma=\frac{1}{2}$ setzen.

Was die Berechnung der Grösse (40.) angeht, so hat man einen Ausdruck gleich oder grösser als $e^{\alpha\log(1-\xi)}$ zu berechnen. Für $\log(1-\xi)$ kann

man mittels der Entwickelung durch die Potenzreihe nach ξ gemäss (18.) einen beliebig angenäherten Werth berechnen, indem eine passende Grösse grösser als der Modul der Reihe sich aus dieser und der Function ergiebt. Dann kann man für e^θ, $\theta > \text{Mod}(\alpha\log(1-\xi))$, mittels der Exponentialreihe nach (18.) einen beliebig angenäherten grösseren Werth berechnen, indem eine passende Grösse grösser als der Modul der Reihe sich mittels der Reihe und der Function ohne Weiteres aufstellen lässt. Vgl. IV *d.*).

III. Es sollen nun für die in I aufgestellten Reihen $P((x-a)^{-1})$ und $Q(x-a)$ die Grössen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ermittelt werden, die gleich oder grösser sind, als die Moduln dieser Reihen in einem Gebiete von x innerhalb des dort genannten um $x=a$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises mit dem Radius R, welcher den Punkt $x=a$ nicht enthält und für die Werthe α, deren Modul gleich 1 ist, und es soll ein Stellenzeiger für jede Reihe angegeben werden, so dass der Rest der Reihe in diesem Gebiete dem Modul nach unterhalb einer vorgeschriebenen Grösse bleibt.

a.) Die Grösse $\mathfrak{A}$ gleich oder grösser als $\text{Mod}\,P((x-a)^{-1})$ werde bestimmt. $P((x-a)^{-1}) = e^{\mathfrak{P}((x-a)^{-1})}$; die Function $\mathfrak{P}((x-a)^{-1})$ entsteht durch Addition der Grössen τ in e^τ bei den ψ No. 1 (52.), wo τ von der Form $\sum\limits_1^n c_{-\varepsilon}(x-a)^{-\varepsilon}$ oder Null ist, und statt $x-a$ eine der Grössen $(x-a)\alpha_1$ bis $(x-a)\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\sigma$ eintritt. Die Grössen α haben zum Modul 1. Wenn man nun in $\mathfrak{P}((x-a)^{-1})$ die Coefficienten durch ihre Moduln oder positive Grössen, die diese übertreffen, ersetzt und statt $x-a$ $\text{Mod}(x-a)=R$, statt α 1 einsetzt, wodurch die Function $\mathfrak{p}(R^{-1})$ erhalten werde, so wird für die Werthe von $x-a$, bei denen $\text{Mod}(x-a) \geqq R$ ist, und für die Werthe der α, deren Modul gleich 1 ist,

$$(48.)\qquad \text{Mod}\,P((x-a)^{-1}) \leqq e^{\mathfrak{p}(R^{-1})}.$$

b.) Nun werde die Grösse $\mathfrak{B}$ gleich oder grösser als $\text{Mod}\,Q(x-a)$ ermittelt. Die Function $Q(x-a)$ ist das Product der Grössen $\frac{\xi}{\zeta}$ bei den ψ No. 1 (52.), wo ξ und ζ hervorgehen aus den Functionen $\eta(x)$ und $\omega(x)$ bei den μ, aus dem Werthe 1 bei $(x-a)^{-1}$ und aus der Function $\chi_{ab}(x)$. In den Entwickelungen dieser Functionen nach Potenzen von $x-a$ tritt statt $x-a$ eine der Grössen $(x-a)\alpha_1$ bis $(x-a)\alpha_1\ldots\alpha_\sigma$ auf, wo die Grössen α zum Modul 1 haben.

Es kommen hier von den Grössen μ die in dem Integrale U No. 1 (30.) enthaltenen in Betracht, nämlich μ_1 bis $\mu_{\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}$, die aus No. 1 (10.)

und (11.) hervorgehen. Die bei Bildung der μ eintretenden Grössen ν No. 1 (10.) gehen aus den Integralen der Differentialgleichungen $\bar{F}_{\alpha_s}=0\,(s=0\dots k-1)$ unter der Form No. 1 (7.) hervor. Diese Integrale haben Entwickelungen der Form No. 1 (19.).

Nach No. 1 *c.*) *werden nun die Grössen* ν *mittels der Differentialdeterminanten dieser Integrale dargestellt.* Die Integrale von $\bar{F}_{\alpha_s}=0$ No. 1 (7.) seien $\bar{y}_{s1}$ bis $\bar{y}_{s\alpha_s}$, die Differentialdeterminante der $\mathfrak{a}$ ersten Integrale sei $D_{\mathfrak{a}}$. Dann ist $D_{\mathfrak{a}}=\nu_{s1}\nu_{s2}\dots\nu_{s\mathfrak{a}}$, daher wird $\nu_{s\mathfrak{b}}=\dfrac{D_{\mathfrak{b}}}{D_{\mathfrak{b}-1}}$.

$D_{\mathfrak{a}}$ hat die Entwickelung

$$(49.)\qquad (x-a)^{r_{s1}+\dots+r_{s\mathfrak{a}}-\frac{(\mathfrak{a}-1)\mathfrak{a}}{2}}\,\Psi_{\mathfrak{a}}(x),$$

wo $\Psi_{\mathfrak{a}}(x)$ eine Entwickelung der Form $\sum\limits_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ hat, worin c_0 von Null verschieden ist, und in dem Ausdrucke von $\mu_{s\mathfrak{b}}$

$$(50.)\qquad \mu_{s\mathfrak{b}}=e^{w_s}\nu_{s\mathfrak{b}}=e^{w_s}(x-a)^{r_{s\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1}\,\frac{\eta_{s\mathfrak{b}}(x)}{\omega_{s\mathfrak{b}}(x)}$$

sind die Functionen $\eta(x)$ und $\omega(x)$ bezüglich $\Psi_{\mathfrak{b}}(x)$ und $\Psi_{\mathfrak{b}-1}(x)$.

Die Function $\Psi_{\mathfrak{a}}(x)$ wird nun erhalten, wenn man in die Determinante

$$(51.)\qquad \begin{vmatrix} (x-a)^{-r_{s1}}\bar{y}_{s1} & (x-a)^{-r_{s2}}\bar{y}_{s2} & \cdots & (x-a)^{-r_{s\mathfrak{a}}}\bar{y}_{s\mathfrak{a}} \\ (x-a)^{-r_{s1}+1}\dfrac{d\bar{y}_{s1}}{dx} & (x-a)^{-r_{s2}+1}\dfrac{d\bar{y}_{s2}}{dx} & \cdots & (x-a)^{-r_{s\mathfrak{a}}+1}\dfrac{d\bar{y}_{s\mathfrak{a}}}{dx} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x-a)^{-r_{s1}+\mathfrak{a}-1}\dfrac{d^{\mathfrak{a}-1}\bar{y}_{s1}}{dx^{\mathfrak{a}-1}} & (x-a)^{-r_{s2}+\mathfrak{a}-1}\dfrac{d^{\mathfrak{a}-1}\bar{y}_{s2}}{dx^{\mathfrak{a}-1}} & \cdots & (x-a)^{-r_{s\mathfrak{a}}+\mathfrak{a}-1}\dfrac{d^{\mathfrak{a}-1}\bar{y}_{s\mathfrak{a}}}{dx^{\mathfrak{a}-1}} \end{vmatrix}$$

für $\bar{y}_{s1}$ bis $\bar{y}_{s\mathfrak{a}}$ ihre Entwickelungen der Form No. 1 (19.) setzt, alsdann die Glieder, die $\log(x-a)$ enthalten, weglässt. Bei dem Integrale $\bar{y}_{s\mathfrak{b}}$ sei die Entwickelung der Form No. 1 (19.) folgende:

$$(52.)\qquad (x-a)^{r_{s\mathfrak{b}}}\{\chi_1(x)+\chi_2(x)\log(x-a)+\dots+\chi_q(x)(\log(x-a))^{q-1}\}.$$

An Stelle von $(x-a)^{-r_{s\mathfrak{b}}+n}\dfrac{d^n\bar{y}_{s\mathfrak{b}}}{dx^n}$ in (51.) ist dann dort beizubehalten die Function

$$(53.)\qquad \begin{cases} k_0^{(1)}\chi_1(x)+k_1^{(1)}(x-a)\dfrac{d\chi_1(x)}{dx}+\dots+k_{n-1}^{(1)}(x-a)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}\chi_1(x)}{dx^{n-1}}+k_n^{(1)}(x-a)^n\dfrac{d^n\chi_1(x)}{dx^n} \\ +k_0^{(2)}\chi_2(x)+k_1^{(2)}(x-a)\dfrac{d\chi_2(x)}{dx}+\dots+k_{n-1}^{(2)}(x-a)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}\chi_2(x)}{dx^{n-1}} \\ +\cdots \\ +k_0^{(n+1)}\chi_{n+1}(x), \end{cases}$$

wo die k Constanten sind, die sich als ganze rationale Ausdrücke von $r_{s\mathfrak{b}}$ mit rationalen Zahlen als Coefficienten darstellen.

Wenn der Ausdruck (52.) die Entwickelung irgend eines Integrales von $\overline{F}_{\alpha_s}=0$ darstellt, worin q eine beliebige fixirte positive ganze Zahl ist und einige oder alle Grössen $\chi(x)$ auch Null sein dürfen, und man aus der Reihe 1, 2 bis q eine Zahl $\mathfrak{b}$ fixirt, so kann man mittels elementarer Operationen aus $\overline{F}_{\alpha_s}=0$ eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 herleiten, welcher der Factor von $(\log(x-a))^{\mathfrak{b}-1}$ in dem Integrale (52.) genügt. Und zwar genügt derselbe dieser nämlichen Differentialgleichung, welche Werthe die Functionen $(x-a)^{r_{s\mathfrak{b}}}\chi_{\mathfrak{c}}(x)$ $(\mathfrak{c}=1\dots q)$ in dem Integrale (52.) haben mögen, über die bei Herleitung der Differentialgleichung nichts bekannt zu sein braucht, gemäss den Untersuchungen Abh. Bd. 87 dieses Journals No. 7 I. Satz *A*. Die rationalen Coefficienten dieser Differentialgleichung enthalten als Constanten rationale Ausdrücke der Constanten a und der Constanten in den Coefficienten von $\overline{F}_{\alpha_s}=0$ mit rationalen Zahlcoefficienten. Man nehme für die Zahl q in diesem Satze diejenige, die so beschaffen ist, dass in den Entwickelungen aller Integrale $\overline{y}_{s1}$ bis $\overline{y}_{s\alpha_s}$ der Form No. 1 (19.) $(\log(x-a))^{q-1}$ die höchste Potenz von $\log(x-a)$ mit nicht verschwindendem Factor ist (nach No. 1 (19.)), und für die Zahl $\mathfrak{b}$ den Werth 1. ***Die alsdann dem Vorstehenden gemäss aus*** $\overline{F}_{\alpha_s}=0$ ***hergeleitete Differentialgleichung werde durch*** $T_\varrho(y,x)=0$ ***bezeichnet;*** ϱ ist die Ordnung und der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1. Dieser Differentialgleichung genügen die Functionen in den Entwickelungen der Integrale $\overline{y}_{s1}$ bis $\overline{y}_{s\alpha_s}$, die mit $(\log(x-a))^0$ multiplicirt sind. Da sich aber durch diese Functionen alle übrigen Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in den Entwickelungen der Integrale als homogene lineare Ausdrücke mit constanten Coefficienten darstellen lassen (vgl. No. 1 (22.) und (25.)), so genügen der Differentialgleichung $T_\varrho(y,x)=0$ alle Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in den Integralen $\overline{y}_{s1}$ bis $\overline{y}_{s\alpha_s}$. (Abh. Bd. 87 No. 7 I. Satz *B*.) Die Differentialgleichung $T_\varrho(y,x)=0$ hat bei $x=a$ den charakteristischen Index gleich Null, weil dieses bei $\overline{F}_{\alpha_s}=0$ der Fall ist (l. c. Satz *C*.). Da in den Functionen $(x-a)^{r_{s\mathfrak{b}}}\chi_{\mathfrak{c}}(x)$ $\mathfrak{c}=1\dots q$ in der Entwickelung von $\overline{y}_{s\mathfrak{b}}$ die Grössen $\chi_1(a)$ bis $\chi_q(a)$ nicht alle verschwinden, so ist $r_{s\mathfrak{b}}$ Wurzel der Ex-

ponentengleichung von $T_\varrho(y,x)=0$ bei $x=a$. Dass die Grössen $r_{\mathfrak{s}1}$ bis $r_{\mathfrak{s}\alpha_\mathfrak{s}}$ $\alpha_\mathfrak{s}$ Wurzeln dieser Exponentengleichung sind, ergiebt sich daraus, dass die Differentialgleichung $T_\varrho(y,x)=0$ gemäss ihrer Herleitung die Integrale von $\overline{F}_{\alpha_\mathfrak{s}}(y,x)=0$, also unter der Form No. 1 (7.) enthält. In der Entwickelung von $(x-a)^{r_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}}\chi_\mathfrak{c}(x)$ kann man eine beliebige Anzahl Coefficienten direct entwickeln (No. 1 (19.)) und die übrigen durch eine Recursionsformel mit constanter Anzahl der Glieder, die sich aus $T_\varrho(y,x)=0$ ergiebt, eindeutig bestimmen. (Abh. B. 87 dieses Journals No. 7 II. *b.*). Die Coefficienten in dieser Entwickelung werden rationale Ausdrücke aus den Constanten a, $r_{\mathfrak{s}1}$ bis $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$ und den Constanten in $\overline{F}_{\alpha_\mathfrak{s}}=0$ mit rationalen Zahlcoefficienten (vgl. (23.), (25.)).

Die Function $(x-a)^{r_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}}\chi_\mathfrak{c}(x)$ $(\mathfrak{c}=1\dots q)$ *in der Entwickelung des Integrales* $\overline{y}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$ (52.) *wird jetzt für die Function* $y=(x-a)^r u$ *in* II. *b.*) *genommen, dabei* $r=r_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$ *gesetzt; es wird* $y=(x-a)^{r_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}}u$ *in die Differentialgleichung* $T_\varrho(y,x)=0$ *eingesetzt und die Differentialgleichung für u hergeleitet. Dies sei die Differentialgleichung* (21.). Dann liefert die Formel (40.) einen Werth gleich oder grösser als der Modul von $\chi_\mathfrak{c}(x)$. In dieser Formel wird R_0 gemäss (41.) gewählt und M_0 aus (43.) bestimmt, γ kann gleich $\frac{1}{2}$ gesetzt werden, der Factor g_0 wird für jede der q Functionen $\chi_\mathfrak{c}(x)$ in der Entwickelung von $\overline{y}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$ (52.) besonders bestimmt als $g_{0\mathfrak{c}}$. Man erhält also

$$(54.)\quad \begin{cases} \operatorname{Mod}\chi_\mathfrak{c}(x) \leqq g_{0\mathfrak{c}}\mathfrak{M} \qquad (\mathfrak{c}=1\dots q) \\ \mathfrak{M}=\left(1-\dfrac{R}{R_0}\right)^{-\left(1+\frac{M_0R_0}{\gamma}\right)} \end{cases}$$

für Werthe $x-a$, bei denen $\operatorname{Mod}(x-a)\leqq R<R_0$ ist. Es werde $0<R_0'<R_0$ genommen und

$$(55.)\quad \mathfrak{M}'=\left(1-\frac{R_0'}{R_0}\right)^{-\left(1+\frac{M_0R_0}{\gamma}\right)}$$

gesetzt. Dann erhält man aus (20.) die Relation

$$(56.)\quad \operatorname{Mod}\frac{d^l\chi_\mathfrak{c}(x)}{dx^l} \leqq \frac{1.2\dots l R_0'}{(R_0'-R)^{l+1}}\, g_{0\mathfrak{c}}\mathfrak{M}'$$

für Werthe von $x-a$, bei denen $\operatorname{Mod}(x-a)\leqq R<R_0'$ ist. Wenn die $\alpha_\mathfrak{s}$ Ausdrücke $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, die den $\alpha_\mathfrak{s}$ Exponenten $r_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b}=1\dots\alpha_\mathfrak{s})$ in den Integralen $\overline{y}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$ entsprechen, gebildet werden, so kann man den Werth R_0 bei allen übereinstimmend wählen, ebenso γ, daher auch R_0', so dass nur M_0 ver-

schiedene Werthe annehmen kann. Es werden nun bei $\bar{y}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_{\mathfrak{s}})$ die Grössen $\mathfrak{M}'$, M_0 und $g_{0\mathfrak{c}}$ bezüglich durch $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}$, $M_{0\mathfrak{b}}$ und $g^{(\mathfrak{b})}_{0\mathfrak{c}}$ bezeichnet, so hat man bei $\bar{y}_{\mathfrak{s}\mathfrak{b}}$:

$$(57.)\qquad g^{(\mathfrak{b})}_{0\mathfrak{c}}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}} = g^{(\mathfrak{b})}_{0\mathfrak{c}}\left(1-\frac{R'_0}{R_0}\right)^{-\left(1+\frac{M_{0\mathfrak{b}}R_0}{\gamma}\right)}\qquad (\mathfrak{b} = 1 \dots \alpha_{\mathfrak{s}}).$$

Wenn man in den Ausdruck (53.) an Stelle von $\chi_{\mathfrak{c}}(x)$ die Grösse $g^{(\mathfrak{b})}_{0\mathfrak{c}}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}$, an Stelle von $\frac{d^l\chi_{\mathfrak{c}}(x)}{dx^l}$ die Grösse $\frac{1.2\dots lR'_0}{(R'_0-R)^{l+1}}g^{(\mathfrak{b})}_{0\mathfrak{c}}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}$ einsetzt, so kommt in jedem Summanden der Factor $\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}$ vor; entsprechend ist es bei allen Ausdrücken von der Art des Ausdruckes (53.), die in einer Vertikalzeile in der Determinante (51.) auftreten. Bildet man daher die Entwickelung der Determinante (51.) mit den Elementen (53.), die für die entsprechenden Elemente in (51.) eintreten, und setzt man in diese Entwickelung an Stelle von $\chi_{\mathfrak{c}}(x)$ ein $g^{(\mathfrak{b})}_{0\mathfrak{c}}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}$, an Stelle von $\frac{d^l\chi_{\mathfrak{c}}(x)}{dx^l}$ ein $\frac{1.2\dots lR'_0}{(R'_0-R)^{l+1}}g^{(\mathfrak{b})}_{0\mathfrak{c}}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}$, an Stelle von $x-a$ ein R und an Stelle jedes Coefficienten seinen Modul oder eine positive Grösse, welche denselben übertrifft, so erhält man den Ausdruck

$$(58.)\qquad \mathfrak{M}'_1\mathfrak{M}'_2\dots\mathfrak{M}'_{\alpha}V_{\alpha}(R),$$

wo V_{α} eine ganze rationale Function von R und $(R'_0-R)^{-1}$ ist, in welcher die Coefficienten sich als ganze rationale Ausdrücke von R'_0 und den Grössen $g^{(\mathfrak{b})}_{0\mathfrak{c}}$ mit positiven Coefficienten darstellen, und es ist zufolge der Relationen (54.) und (56.)

$$(59.)\qquad \operatorname{Mod}\Psi_{\alpha}(x) \leqq \mathfrak{M}'_1\mathfrak{M}'_2\dots\mathfrak{M}'_{\alpha}V_{\alpha}(R)$$

für Werthe von $x-a$, bei denen $\operatorname{Mod}(x-a) \leqq R < R'_0$ ist.

Es ist ferner, da die Function $\Psi_{\alpha}(x)$ auch im Nenner des Quotienten für $Q(x-a)$ vorkommt, eine positive Grösse > 0 zu ermitteln, die gleich oder kleiner als $\operatorname{Mod}\Psi_{\alpha}(x)$ ist.

In dem Ausdrucke (53.) werde $\chi_{\mathfrak{c}}(x) = \chi_{\mathfrak{c}}(a)+(x-a)\bar{\chi}_{\mathfrak{c}}(x)$, $(\mathfrak{c} = 1\dots n+1)$ gesetzt, alsdann

$$(60.)\qquad k^{(1)}_0\chi_1(a)+k^{(2)}_0\chi_2(a)+\dots+k^{(n+1)}_0\chi_{n+1}(a)$$

durch A und

$$(61.)\quad \left\{\begin{array}{l} k^{(1)}_0\bar{\chi}_1(x)+k^{(1)}_1\frac{d\chi_1(x)}{dx}+k^{(1)}_2(x-a)\frac{d^2\chi_1(x)}{dx^2}+\dots+k^{(1)}_n(x-a)^{n-1}\frac{d^n\chi_1(x)}{dx^n} \\ +k^{(2)}_0\bar{\chi}_2(x)+k^{(2)}_1\frac{d\chi_2(x)}{dx}+k^{(2)}_2(x-a)\frac{d^2\chi_2(x)}{dx^2}+\dots+k^{(2)}_{n-1}(x-a)^{n-2}\frac{d^{n-1}\chi_2(x)}{dx^{n-1}} \\ +\dots \\ +k^{(n+1)}_0\bar{\chi}_{n+1}(x) \end{array}\right.$$

durch B bezeichnet. Die Determinante (51.), worin das einzelne Element durch den entsprechenden Ausdruck (53.) ersetzt ist, wird nun in folgender Weise dargestellt. Wenn in der ersten, zweiten bis k^{ten} Vertikalzeile dieser Determinante x gleich a gesetzt wird, in der $(k+1)^{\text{ten}}$ statt des Ausdruckes $A+(x-a)B$ in deren einzelnen Elementen nur B beibehalten wird und die übrigen Vertikalzeilen unverändert gelassen werden, so werde die auf diese Weise erhaltene Determinante durch $\Delta_{\mathfrak{a}-k}$ bezeichnet. Alsdann wird

$$(62.)\qquad \Psi_{\mathfrak{a}}(x) = \Delta_0+(x-a)(\Delta_1+\Delta_2+\cdots+\Delta_{\mathfrak{a}}).$$

In der Entwickelung von $\chi_\iota(x)$ (52.) von der Form $\sum\limits_0^\infty \mathfrak{c}_\alpha(x-a)^\alpha$ ist der Coefficient von $(x-a)^\alpha$ dem Modul nach gleich oder kleiner als $\dfrac{g_{0\kappa}^{(\mathfrak{b})}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}}{R'^{\alpha}_0}$ (17.). Daher erhält man

$$(63.)\qquad \operatorname{Mod}\bar{\chi}_\iota(x) \leqq \frac{g_{0\kappa}^{(\mathfrak{b})}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}}{R'_0}\,\frac{1}{1-\dfrac{R}{R'_0}}$$

für Werthe von $x-a$, bei denen $\operatorname{Mod}(x-a)\leqq R<R'_0$ ist. Setzt man nun in der Entwickelung der Determinante $\Delta_{\mathfrak{b}}$ $(\mathfrak{b}=1\ldots\mathfrak{a})$ an Stelle von $\bar{\chi}_\iota(x)$ den Ausdruck rechts in (63.), an Stelle von $\chi_\iota(x)$ die Grösse $g_{0\kappa}^{(\mathfrak{b})}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}$, an Stelle von $\dfrac{d^l\chi_\iota(x)}{dx^l}$ den Werth $\dfrac{1.2\ldots l R'_0}{(R'_0-R)^{l+1}}\,g_{0\kappa}^{(\mathfrak{b})}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{b}}$, an Stelle von $x-a$ den Werth R und an Stelle jedes Coefficienten eine positive Grösse gleich oder grösser als der Modul dieses Coefficienten, so erhält man den Ausdruck

$$(64.)\qquad \mathfrak{M}'_{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+1)}\mathfrak{M}'_{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+2)}\ldots\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}}V'_{\mathfrak{b}}(R),$$

wo $V'_{\mathfrak{b}}(R)$ eine ganze rationale Function von R und $(R'_0-R)^{-1}$ ist, deren Coefficienten ganze rationale Ausdrücke von R'_0 und den Grössen $g_{0\kappa}^{(\mathfrak{b})}$ mit positiven Coefficienten sind, und gemäss den Relationen (56.) und (63.) ist

$$(65.)\qquad \operatorname{Mod}\Delta_{\mathfrak{b}} \leqq \mathfrak{M}'_{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+1)}\mathfrak{M}'_{(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}+2)}\ldots\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}}V'_{\mathfrak{b}}(R)\qquad (\mathfrak{b}=1\ldots\mathfrak{a})$$

für Werthe von $x-a$, bei denen $\operatorname{Mod}(x-a)\leqq R<R'_0$ ist. Δ_0 ist von Null verschieden (49.). Wird nun für $R<R'_0$ ein Werth $R_1>0$ genommen, so dass

$$(66.)\qquad \operatorname{Mod}\Delta_0-R_1[\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}}V'_1(R_1)+\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}-1}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}}V'_2(R_1)+\cdots+\mathfrak{M}'_1\ldots\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}}V'_{\mathfrak{a}}(R_1)]>0$$

ist, so ist gemäss (65.) (vgl. (42.))

$$(67.)\qquad \begin{cases} \operatorname{Mod}\Psi_{\mathfrak{a}}(x) \\ \geqq \operatorname{Mod}\Delta_0-R[\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}}V'_1(R)+\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}-1}\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}}V'_2(R)+\cdots+\mathfrak{M}'_1\ldots\mathfrak{M}'_{\mathfrak{a}}V'_{\mathfrak{a}}(R)]>0 \end{cases}$$

für Werthe von $x-a$, bei denen $\operatorname{Mod}(x-a)\leqq R\leqq R_1<R'_0$ ist.

Statt der Grössen $\mathfrak{M}'_b$ (57.) kann man in der Relation (59.) auch andere positive Werthe nehmen, die grösser sind als $\mathfrak{M}'_b$, ebenso kann man in (66.) und (67.) statt $\mathfrak{M}'_b$ andere positive Werthe grösser als jene nehmen und R_1 aus (66.) bestimmen, dann bleibt die Relation (67.) erhalten.

Die Function $Q(x-a)$, in Bezug auf welche die Grösse $\mathfrak{B}$ gleich oder grösser als $\mathrm{Mod}(Q(x-a))$ zu ermitteln war, ist das Product der Grössen $\frac{\xi}{\zeta}$ bei den Functionen ψ No. 1 (52.), die in dem Integrale S (1.), (3.) vorkommen. Das Integral S ist das Integral in der Darstellung No. 1 (51.) der Integralfunction in U No. 1 (30.)

$$(68.)\qquad \int dx\, u_2 \int dx\, u_3 \dots \int u_s\, dx.$$

Die Grössen u, die in (68.) enthalten sind, sind die Functionen

$$(69.)\quad \mu_1^{-1}\mu_2,\; \mu_2^{-1}\mu_3,\; \dots\; \mu^{-1}_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\mu_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}-1},\; \mu^{-1}_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}} e^{w_k}(x-a)^{r_a}\chi_{ab}(x),$$

und es kann die Function $(x-a)^{-1}$ ein- oder mehreremal auftreten. Ist μ_c gleich μ_{sb}, so hat dasselbe den Ausdruck (50.). Die in diesem Ausdrucke vorkommenden Functionen η_{sb} und ω_{sb} werden bei μ_c durch η_c und ω_c bezeichnet. Nun sind die Grössen $\frac{\xi}{\zeta}$ bei den Functionen ψ in dem Integrale S (3.) folgende:

$$(70.)\quad \frac{\omega_1}{\eta_1}\frac{\eta_2}{\omega_2},\quad \frac{\omega_2}{\eta_2}\frac{\eta_3}{\omega_3},\quad \dots\quad \frac{\omega_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}-1}}{\eta_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}-1}}\frac{\eta_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}}{\omega_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}},\quad \frac{\omega_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}}{\eta_{\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}}\chi_{ab}(x)$$

und die Grösse 1, die aus jedem $u=(x-a)^{-1}$ als Factor hervorgeht, wo jede der Grössen (70.) in der Entwickelung nach Potenzen von $x-a$ statt $x-a$ eine der Grössen $(x-a)\alpha_1$, $(x-a)\alpha_1\alpha_2$, $\dots$ $(x-a)\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_\sigma$ enthält, bei denen die α Werthe haben, deren Modul gleich 1 ist.

Die in (70.) auftretenden Functionen η und ω werden durch die Functionen $\Psi(x)$ (49.) (50.) gegeben, die bei den Differentialgleichungen $\overline{F}_{\alpha_s}=0$ $(s=0\dots k-1)$ vorkommen. Die Function $\chi_{ab}(x)$ geht aus den Integralen der Differentialgleichung $\overline{F}_{\alpha_k}=0$ No. 1 (19.) hervor. Für jede einzelne Function $\Psi(x)$ erhält man durch die Relationen (59.) und (67.) je einen von R abhängenden Ausdruck, von denen der eine gleich oder grösser, der andere gleich oder kleiner als $\mathrm{Mod}\,\Psi(x)$ ist, für Werthe von $x-a$, bei denen $\mathrm{Mod}(x-a) \leqq R_1$ (66.) ist. Eine Grösse R_1 mit der vorhin genannten Eigenschaft werde nun für alle in Betracht kommenden Functionen $\Psi(x)$ übereinstimmend genommen, und es werde für die Function $\chi_{ab}(x)$ gemäss

(54.) (55.) ein Werth ermittelt gleich oder grösser als $\mathrm{Mod}\,\chi_{ab}(x)$ für Werthe von $x-a$, bei denen $\mathrm{Mod}(x-a) \leqq R_1$ ist, wo R_1 mit dem für die Functionen $\Psi(x)$ bestimmten R_1 übereinstimmen soll. Wird dann in die Entwickelung einer Function $\Psi(x)$ oder $\chi_{ab}(x)$ nach Potenzen von $x-a$ eine der Grössen $(x-a)\alpha_1$ bis $(x-a)\alpha_1\ldots\alpha_\sigma$ statt $x-a$ eingesetzt, so bleiben die Relationen (59.), (67.), (54.) erhalten für die vorhin bezeichneten Werthe von $x-a$, wenn die α Werthe erhalten, deren Modul gleich 1 ist.

Die Function $Q(x-a)$ ist nun das Product der Functionen (70.) Setzt man statt der Grössen η und ω und χ_{ab} im Zähler die bezüglichen Ausdrücke (59.) (54.), statt der Grössen η und ω im Nenner die entsprechenden Ausdrücke (67.), so erhält man einen Quotienten $\mathfrak{Q}(R)$, dessen Zähler und Nenner eine ganze rationale Function von R und $(R_0'-R)^{-1}$ ist und welcher die Relation

$$(71.)\qquad \mathrm{Mod}\,Q(x-a) \leqq \mathfrak{Q}(R)$$

erfüllt, für die Werthe von $x-a$, bei denen $\mathrm{Mod}(x-a) \leqq R \leqq R_1$, und für die Werthe der Grössen α_1 bis α_σ, deren Modul gleich 1 ist.

c.) In dem Kreise um $x=a$ als Mittelpunkt mit dem Radius R_1, wo R_1 die am Schlusse von *b.*) bezeichnete Grösse ist, in welchem Gebiete die dort genannten Grössen $\eta(x)$ und $\omega(x)$ einwerthig und stetig bleiben und nicht verschwinden, $\chi_{ab}(x)$ einwerthig und stetig ist, wird ein concentrischer Kreisring mit den Radien R_1' und R_1'' genommen, so dass $0 < R_1' < R_1'' < R_1$ ist, und ein zweiter concentrischer Kreisring mit den Radien R_2' und R_2'', so dass $0 < R_2' < R_1' < R_1'' < R_2'' < R_1$ ist.

***Man hat dann für die Werthe** x **in dem Kreisringe mit den Radien** R_2' **und** R_2'' **und die Werthe** α, **deren Modul gleich** 1 **ist, gemäss** (48.) **und** (71.)*

$$(72.)\qquad \mathrm{Mod}\,P((x-a)^{-1}) \leqq e^{\mathfrak{p}(R_2'^{-1})} = \mathfrak{A},$$
$$(73.)\qquad \mathrm{Mod}\,Q(x-a) \leqq \mathfrak{Q}(R_2'') = \mathfrak{B}.$$

Um nun in der Reihenentwickelung von $P((x-a)^{-1})$ nach Potenzen von $(x-a)^{-1}$ (5.) einen Stellenzeiger ν_1 zu finden, von welchem an summirt der Rest der Reihe P'' für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_1' und R_1'' und die Werthe α, deren Modul gleich 1 ist, dem Modul nach gleich oder kleiner als $\varkappa_1$ bleibt, wo $\varkappa_1$ eine vorgeschriebene, beliebig kleine positive Grösse >0 ist, wird die Formel (18.) angewandt für $\xi = (x-a)^{-1}$. ***Es ist nach Formel** (18.) ν_1 **so zu bestimmen, dass***

$$(74.)\qquad e^{\mathfrak{p}(R_2'^{-1})}\left(\frac{R_1'^{-1}}{R_2'^{-1}}\right)^{\nu_1}\frac{1}{1-\frac{R_1'^{-1}}{R_2'^{-1}}} \leqq \varkappa_1.$$

Und um in der Reihenentwickelung von $Q(x-a)$ nach Potenzen von $x-a$ (7.) einen Stellenzeiger ν_2 zu ermitteln, von welchem an summirt der Rest der Reihe Q'' für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_1' und und R_1'' und die Werthe α, deren Modul gleich 1 ist, dem Modul nach gleich oder kleiner als $\varkappa_2$ bleibt, wo $\varkappa_2$ eine vorgeschriebene beliebig kleine positive Grösse > 0 ist, ***wird nach Formel*** (18.) ν_2 ***so bestimmt, dass***

$$(75.)\qquad \mathfrak{Q}(R_2'')\left(\frac{R_1''}{R_2''}\right)^{\nu_2}\frac{1}{1-\frac{R_1''}{R_2''}} \leqq \varkappa_2.$$

IV. *a.*) Es war in I bei der Function U

$$(76.)\qquad U = (x-a)^{r_a+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\psi_0(x-a)S$$

der Werth der Grösse $\psi_0(x-a)S$ zu ermitteln. Das Integral S ist

$$(77.)\qquad S = \int_1' d\alpha_1 \dots \int_1' P((x-a)^{-1})\,Q(x-a)\,\alpha_1^{\varrho_1}\dots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma.$$

Die Reihe $P((x-a)^{-1}) = \sum_0^\infty p_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ wird in zwei Theile getheilt

$$\sum_0^{\nu_1-1} p_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha} = P' \quad \text{und} \quad \sum_{\nu_1}^\infty p_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha} = P'',$$

ebenso wird die Reihe $Q(x-a) = \sum_0^\infty q_\alpha(x-a)^\alpha$ in zwei Theile getheilt

$$\sum_0^{\nu_2-1} q_\alpha(x-a)^\alpha = Q' \quad \text{und} \quad \sum_{\nu_2}^\infty q_\alpha(x-a)^\alpha = Q''.$$

Dann ist $PQ-P'Q' = P'Q''+P''Q'+P''Q''$ und

$$(78.)\qquad \begin{cases} S = \int_1' d\alpha_1 \dots \int_1' P'Q'\,\alpha_1^{\varrho_1}\dots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma \\ +\int_1' d\alpha_1 \dots \int_1' (PQ-P'Q')\,\alpha_1^{\varrho_1}\dots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}\,d\alpha_\sigma. \end{cases}$$

Nun wird nach III *c.*) für x das Gebiet in dem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt mit dem dort bezeichneten Radius R_1 genommen und es werden die concentrischen Kreisringe mit den dort genannten Radien R_1', R_2', R_1'', R_2'', bei welchen $0 < R_2' < R_1' < R_1'' < R_2'' < R_1$ ist, in Betracht gezogen.

Für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_2' und R_2'' und für die Werthe α, deren Modul gleich 1 ist, ist

$$(79.)\qquad \operatorname{Mod} P \leqq \mathfrak{A},\quad \operatorname{Mod} Q \leqq \mathfrak{B},$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die durch (72.) und (73.) bestimmten Grössen sind, und es sind durch (74.) und (75.) die Stellenzeiger ν_1 und ν_2 in den Reihen P und Q bestimmt worden, so dass für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_1' und R_1'' und die Werthe α, deren Modul gleich 1 ist,

$$(80.)\qquad \operatorname{Mod} P'' \leqq \varkappa_1, \quad \operatorname{Mod} Q'' \leqq \varkappa_2$$

ist, wo $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ beliebig vorgeschriebene positive Grössen >0 sind. Daher ist für Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_1' und R_1'' und Werthe α, deren Modul gleich 1 ist,

$$(81.)\qquad \operatorname{Mod} P' \leqq \mathfrak{A}+\varkappa_1, \quad \operatorname{Mod} Q' \leqq \mathfrak{B}+\varkappa_2.$$

Durch das Verfahren, das dem bei (13.), (14.) angewandten entspricht, ergiebt sich aus (77.) für Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_2' und R_2''

$$(82.)\qquad \operatorname{Mod} S \leqq \mathfrak{A}\mathfrak{B}\eta(2\pi)^\sigma,$$

wo η eine positive Grösse ist gleich oder grösser als das Product der bei (13.) genannten η_1 bis η_σ, und es ergiebt sich für Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_1' und R_1'', wenn

$$(83.)\qquad \begin{cases} \int_1' d\alpha_1 \ldots \int_1' P'Q'\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}d\alpha_\sigma = S', \\ \int_1' d\alpha_1 \ldots \int_1' (P'Q''+P''Q'+P''Q'')\alpha_1^{\varrho_1}\ldots\alpha_\sigma^{\varrho_\sigma}d\alpha_\sigma = S'' \end{cases}$$

gesetzt werden,

$$(84.)\qquad \begin{cases} \operatorname{Mod} S' \leqq (\mathfrak{A}+\varkappa_1)(\mathfrak{B}+\varkappa_2)\eta(2\pi)^\sigma, \\ \operatorname{Mod} S'' \leqq [(\mathfrak{A}+\varkappa_1)\varkappa_2+(\mathfrak{B}+\varkappa_2)\varkappa_1+\varkappa_1\varkappa_2]\eta(2\pi)^\sigma = \omega\eta(2\pi)^\sigma. \end{cases}$$

Der Factor $\psi_0(x-a)$ in U ist

$$(85.)\qquad \psi_0(x-a) = \frac{\varkappa(x-a)^{-r_{01}}\mu_{01}}{(e^{\varrho_1 2\pi i}-1)\ldots(e^{\varrho_\sigma 2\pi i}-1)} = \frac{\varkappa e^{w_0}\bar{y}_{01}}{(e^{\varrho_1 2\pi i}-1)\ldots(e^{\varrho_\sigma 2\pi i}-1)}.$$

Man hat für e^{w_0} eine Reihenentwickelung nach Potenzen von $(x-a)^{-1}$, deren einzelne Glieder man aufstellen kann,

$$(86.)\qquad e^{w_0} = p((x-a)^{-1})$$

und für den anderen Factor in ψ_0 eine Reihenentwickelung nach Potenzen von $x-a$

$$(87.)\qquad \frac{\varkappa\bar{y}_{01}}{(e^{\varrho_1 2\pi i}-1)\ldots(e^{\varrho_\sigma 2\pi i}-1)} = q(x-a),$$

welche in dem Bezirke von $x=a$ bei der Differentialgleichung für $\bar{y}_{01}$ $\bar{F}_{\alpha_0}=0$ convergirt, und deren einzelne Glieder man mittels dieser Differentialglei-

chung angeben kann. Die Reihe $p((x-a)^{-1})$ wird in zwei Theile p' und p'' getheilt, von denen p' alle Glieder bis zu einem bestimmten Stellenzeiger $\nu_1'-1$ enthält, p'' die übrigen, ebenso wird die Reihe $q(x-a)$ in zwei Theile q' und q'' getheilt, von denen q' alle Glieder bis zu einem gewissen Stellenzeiger $\nu_2'-1$ enthält, q'' die übrigen. Dann ist

$$(88.)\qquad \psi_0(x-a) = p'q'+(p'q''+p''q'+p''q'').$$

Nun erhält man, wenn für die Coefficienten in w_0 ihre Moduln oder positive Grössen, die diese übertreffen, eintreten und für $x-a$ $\text{Mod}(x-a) = R$ eingesetzt wird, wodurch aus w_0 der Ausdruck $\mathfrak{w}(R^{-1})$ hervorgehe,

$$(89.)\qquad \text{Mod}\, e^{w_0} \leqq e^{\mathfrak{w}(R^{-1})}$$

für Werthe von $x=a$, deren Modul gleich oder grösser als R ist. Für y_{01} erhält man aus der Differentialgleichung $\overline{F}_{a_0}=0$ gemäss Formel (40.) eine Grösse gleich oder grösser als $\text{Mod}\,\overline{y}_{01}$ für $\text{Mod}(x-a) \leqq R < R_0$, dabei wird R_0 aus (41.) und M_0 aus (43.) bestimmt. Für den Radius R_1 des Kreises um $x=a$, der bei (78.) genannt ist, wird ein Werth kleiner als das vorhin bezeichnete R_0 genommen, was sofort angeht, da statt eines Werthes R_1 jeder kleinere (>0) mit demselben Ergebnisse genommen werden kann. Der Ausdruck (40.) gleich oder grösser als $\text{Mod}\,\overline{y}_{01}$ ist noch mit einer Grösse gleich oder grösser als $\text{Mod}\dfrac{\varkappa}{(e^{\varrho_1 2\pi i}-1)\dots(e^{\varrho_\sigma 2\pi i}-1)}$ zu multipliciren, wodurch die Function von R $\mathfrak{q}(R)$ erhalten werde, dann ist

$$(90.)\qquad \text{Mod}\frac{\varkappa\overline{y}_{01}}{(e^{\varrho_1 2\pi i}-1)\dots(e^{\varrho_\sigma 2\pi i}-1)} \leqq \mathfrak{q}(R)$$

für Werthe von $x-a$, bei denen $\text{Mod}(x-a) \leqq R \leqq R_1$ ist. $\text{Mod}\,\varkappa$ ist eine positive ganze Zahl, und was die Grösse gleich oder grösser als

$$\text{Mod}\frac{1}{(e^{\varrho_1 2\pi i}-1)\dots(e^{\varrho_\sigma 2\pi i}-1)}$$

angeht, so werde bemerkt, dass wenn $\varrho_i = p_i + iq_i$ ist,

$$\text{Mod}(e^{-q_i 2\pi}-1) \leqq \text{Mod}(e^{\varrho_i 2\pi i}-1)$$

ist, wenn $q \gtrless 0$, und $[2(1-\cos p_i 2\pi)]^{\frac{1}{2}} = \text{Mod}(e^{\varrho_i 2\pi i}-1)$ ist, wenn $q=0$.

Setzt man nun

$$(91.)\qquad e^{\mathfrak{w}(R_2'^{-1})} = \mathfrak{a},\qquad \mathfrak{q}(R_2'') = \mathfrak{b}$$

und bestimmt die Stellenzeiger ν_1' und ν_2' aus

$$(92.)\qquad e^{\mathfrak{w}(R_2'^{-1})}\left(\frac{R_1'^{-1}}{R_2'^{-1}}\right)^{\nu_1'}\frac{1}{1-\frac{R_1'^{-1}}{R_2'^{-1}}}\leqq \varkappa_1',\quad \mathfrak{q}(R_2'')\left(\frac{R_1''}{R_2''}\right)^{\nu_2'}\frac{1}{1-\frac{R_1''}{R_2''}}\leqq \varkappa_2',$$

so hat man für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_2' und R_2''

$$(93.)\qquad \text{Mod}\, p\leqq \mathfrak{a},\quad \text{Mod}\, q\leqq \mathfrak{b}$$

und für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_1' und R_1''

$$(94.)\qquad \text{Mod}\, p''\leqq \varkappa_1',\quad \text{Mod}\, q''\leqq \varkappa_2',$$

wo $\varkappa_1'$ und $\varkappa_2'$ beliebig vorgeschriebene positive Grössen >0 sind, daher in demselben Kreisringe

$$(95.)\qquad \text{Mod}\, p'\leqq \mathfrak{a}+\varkappa_1',\quad \text{Mod}\, q'\leqq \mathfrak{b}+\varkappa_2'.$$

Es werde

$$(96.)\qquad p'q'=\psi_0',\quad p'q''+p''q'+p''q''=\psi_0''$$

gesetzt. Dann ist für Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_2' und R_2''

$$(97.)\qquad \text{Mod}\,\psi_0\leqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

und für Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_1' und R_1''

$$(98.)\qquad \text{Mod}\,\psi_0'\leqq(\mathfrak{a}+\varkappa_1')(\mathfrak{b}+\varkappa_2'),\quad \text{Mod}\,\psi_0''\leqq(\mathfrak{a}+\varkappa_1')\varkappa_2'+(\mathfrak{b}+\varkappa_2')\varkappa_1'+\varkappa_1'\varkappa_2'=\omega'.$$

Es ist nun für das Gebiet von x innerhalb des Kreises mit dem Radius R_1, abgesehen von $x=a$,

$$(99.)\qquad \psi_0 S = \psi_0'S'+(\psi_0'S''+\psi_0''S'+\psi_0''S'').$$

Für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_2' und R_2'' ist

$$(100.)\qquad \text{Mod}\,\psi_0 S\leqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\eta(2\pi)^\sigma.$$

Für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R_1' und R_1'' ist

$$(101.)\qquad \begin{cases} \text{Mod}(\psi_0'S''+\psi_0''S'+\psi_0''S'') \\ \leqq[(\mathfrak{a}+\varkappa_1')(\mathfrak{b}+\varkappa_2')\omega+(\mathfrak{A}+\varkappa_1)(\mathfrak{B}+\varkappa_2)\omega'+\omega\omega']\eta(2\pi)^\sigma=\varepsilon\end{cases}$$

und daher

$$(102.)\qquad \text{Mod}\,\psi_0'S' \leqq \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\eta(2\pi)^\sigma+\varepsilon.$$

Die Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, η sind bekannt. Die positive Grösse $\varepsilon>0$ wird vorgeschrieben, alsdann werden die positiven Grössen (>0) $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$ so gewählt, dass die Gleichung

$$(103.)\qquad [(\mathfrak{a}+\varkappa_1')(\mathfrak{b}+\varkappa_2')\omega+(\mathfrak{A}+\varkappa_1)(\mathfrak{B}+\varkappa_2)\omega'+\omega\omega']\eta(2\pi)^\sigma = \varepsilon,$$

worin für ω in ω' ihre Ausdrücke aus (84.) und (98.) eintreten, erfüllt ist.

Und nun werden die Stellenzeiger ν_1, ν_2, ν'_1 und ν'_2 gemäss (80.) und (94.) bestimmt, ***dann erhält man die ganzen rationalen Functionen*** S' ***und*** ψ'_0 ***von*** $x-a$ ***und*** $(x-a)^{-1}$ ***aus*** (83.) ***und*** (96.), ***so dass für die Differenz*** $\psi_0 S - \psi'_0 S'$ ***gemäss*** (99.) ***die Relation*** (101.) ***für die Werthe*** x ***in dem Kreisringe mit den Radien*** R'_1 ***und*** R''_1 ***erfüllt ist. Die Coefficienten in der ganzen rationalen Function*** $\psi'_0 S'$ ***von*** $x-a$ ***und*** $(x-a)^{-1}$ ***sind rationale Functionen von Constanten in den Reihen*** p, $\overline{y}_{01}$, P ***und*** Q ***und*** ϱ_1 ***bis*** ϱ_σ ***mit rationalen Zahlcoefficienten.***

b.) Die Function $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}\varphi_{ab}(x)$ No. 1 (21.) ist die Summe einer endlichen Anzahl von Functionen U (76.), demnach $\varphi_{ab}(x)$ gleich der Summe einer endlichen Anzahl von Functionen $\psi_0 S$, wie sie in *a.*) betrachtet sind. Diese Anzahl sei n und die $\psi_0 S$ durch $\psi_{0(\mathfrak{c})} S_\mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c} = 1 \ldots n$) bezeichnet, so dass

$$(104.) \qquad \varphi_{ab}(x) = \sum_1^n \psi_{0(\mathfrak{c})} S_\mathfrak{c}.$$

Der in *a.*) bezeichnete Radius R_1 des Kreises um $x = a$, der sich auf je eine Function $\psi_0 S$ bezieht, werde bei allen n Functionen übereinstimmend genommen und kleiner als der Radius des Bezirkes von $x = a$ bei der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ (1.) der No. 1, was angeht, da statt eines bereits erhaltenen Werthes für R_1 auch jeder kleinere (> 0) genommen werden kann.

Es werden ferner S' und S'', ψ'_0 und ψ''_0 in *a.*) bei $\psi_{0(\mathfrak{c})} S_\mathfrak{c}$ durch $S'_\mathfrak{c}$, $S''_\mathfrak{c}$, $\psi'_{0\mathfrak{c}}$, $\psi''_{0\mathfrak{c}}$ bezeichnet. Dann erhält man nach (99.) für das Gebiet von x innerhalb des Kreises mit dem Radius R_1 abgesehen von $x = a$

$$(105.) \qquad \varphi_{ab}(x) = \sum_1^n \psi'_{0\mathfrak{c}} S'_\mathfrak{c} + \sum_1^n (\psi'_{0\mathfrak{c}} S''_\mathfrak{c} + \psi''_{0\mathfrak{c}} S'_\mathfrak{c} + \psi''_{0\mathfrak{c}} S''_\mathfrak{c}).$$

Werden die in (100.) vorkommenden Werthe bei $\psi_{0(\mathfrak{c})} S_\mathfrak{c}$ durch $\mathfrak{a}_\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_\mathfrak{c}$, $\mathfrak{A}_\mathfrak{c}$, $\mathfrak{B}_\mathfrak{c}$, $\eta_\mathfrak{c}$, $\sigma_\mathfrak{c}$ bezeichnet, so erhält man für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R'_2 und R''_2

$$(106.) \qquad \operatorname{Mod} \varphi_{ab}(x) \leqq \sum_1^n \mathfrak{a}_\mathfrak{c} \mathfrak{b}_\mathfrak{c} \mathfrak{A}_\mathfrak{c} \mathfrak{B}_\mathfrak{c} \eta_\mathfrak{c} (2\pi)^{\sigma_\mathfrak{c}}.$$

Für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R'_1 und R''_1 ist

$$(107.) \qquad \operatorname{Mod}[\psi'_{0\mathfrak{c}} S''_\mathfrak{c} + \psi''_{0\mathfrak{c}} S'_\mathfrak{c} + \psi''_{0\mathfrak{c}} S''_\mathfrak{c}] \leqq \varepsilon_\mathfrak{c},$$

wo $\varepsilon_\mathfrak{c}$ die beliebig kleine positive Grösse $\varepsilon > 0$ in (101.) ist. Daher

$$(108.) \qquad \operatorname{Mod} \sum_1^n [\psi'_{0\mathfrak{c}} S''_\mathfrak{c} + \psi''_{0\mathfrak{c}} S'_\mathfrak{c} + \psi''_{0\mathfrak{c}} S''_\mathfrak{c}] \leqq \sum_1^n \varepsilon_\mathfrak{c}.$$

Dann ist für x in demselben Kreisringe

$$(109.) \qquad \operatorname{Mod} \sum_1^n \psi'_{0\mathfrak{c}} S'_\mathfrak{c} \leqq \sum_1^n \mathfrak{a}_\mathfrak{c} \mathfrak{b}_\mathfrak{c} \mathfrak{A}_\mathfrak{c} \mathfrak{B}_\mathfrak{c} \eta_\mathfrak{c} (2\pi)^{\sigma_\mathfrak{c}} + \sum_1^n \varepsilon_\mathfrak{c}.$$

Wird der Werth von $\sum_1^n \varepsilon_t$ vorgeschrieben, so werden die ε_t diesem Werthe gemäss gewählt, alsdann nach $a.$) die ganzen rationalen Functionen ψ'_{0t} und S'_t von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ ermittelt, so beschaffen, dass die Relation (108.) für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R'_1 und R''_1 erfüllt ist.

Nach No. 1 Schluss von $a.$) ist $(x-a)^{r_g+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{g\mathfrak{b}}(x)$ $(\mathfrak{b}=2\dots g)$ gleich einem homogenen linearen Ausdrucke der Functionen

$$(x-a)^{r_\mathfrak{a}+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}(x) \qquad \begin{pmatrix}\mathfrak{a}=1\dots g-1\\ \mathfrak{c}=1\dots\mathfrak{a}\end{pmatrix}$$

mit constanten Coefficienten, und wird demnach gleich einem homogenen linearen Ausdrucke der Functionen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{\mathfrak{a}1}(x)$ $(\mathfrak{a}=1\dots g-1)$ mit constanten Coefficienten, die bekannt sind. Es ist also $\varphi_{g\mathfrak{b}}(x)$ $(\mathfrak{b}=2\dots g)$ gleich einem homogenen linearen Ausdrucke von $(x-a)^{r_\mathfrak{a}-r_g}\varphi_{\mathfrak{a}1}(x)$ $(\mathfrak{a}=1\dots g-1)$ mit bekannten constanten Coefficienten, wo $r_\mathfrak{a}-r_g$ positive ganze Zahlen sind, unter denen auch Null sein kann. Nun soll bei allen Functionen $\varphi_{\mathfrak{a}1}(x)$ $(\mathfrak{a}=1\dots\lambda)$ der Gruppe der Integrale No. 1 (21.) der vorhin genannte Radius R_1 übereinstimmend genommen werden. Dann werde Formel (105.) auf die Function $\varphi_{\mathfrak{a}1}(x)$ bezogen und in derselben der Ausdruck

$$(110.)\qquad \sum_1^n \psi'_{0t}S'_t = \varphi'_{\mathfrak{a}1}(x),$$

$$(111.)\qquad \sum_1^n \psi'_{0t}S''_t+\psi''_{0t}S'_t+\psi''_{0t}S''_t) = \varphi''_{\mathfrak{a}1}(x)$$

und in (108.) $\sum_1^n \varepsilon_t = \varepsilon_{\mathfrak{a}1}$ gesetzt. Der Ausdruck rechts in der Relation (106.) werde bei $\varphi_{\mathfrak{a}1}(x)$ durch $Z_{\mathfrak{a}1}$ bezeichnet. Die Ausdrücke der übrigen $\varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(x)$ durch die $\varphi_{\mathfrak{a}1}(x)$ seien aufgestellt. Ein solcher Ausdruck sei

$$(112.)\qquad k_1(x-a)^{r_1-r_\mathfrak{a}}\varphi_{11}+k_2(x-a)^{r_2-r_\mathfrak{a}}\varphi_{21}+\dots+k_{\mathfrak{a}-1}(x-a)^{r_{\mathfrak{a}-1}-r_\mathfrak{a}}\varphi_{\mathfrak{a}-11} = \varphi_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},$$

dann wird

$$(113.)\qquad k_1(x-a)^{r_1-r_\mathfrak{a}}\varphi'_{11}+k_2(x-a)^{r_2-r_\mathfrak{a}}\varphi'_{21}+\dots+k_{\mathfrak{a}-1}(x-a)^{r_{\mathfrak{a}-1}-r_\mathfrak{a}}\varphi'_{\mathfrak{a}-11} = \varphi'_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},$$

$$(114.)\qquad k_1(x-a)^{r_1-r_\mathfrak{a}}\varphi''_{11}+k_2(x-a)^{r_2-r_\mathfrak{a}}\varphi''_{21}+\dots+k_{\mathfrak{a}-1}(x-a)^{r_{\mathfrak{a}-1}-r_\mathfrak{a}}\varphi''_{\mathfrak{a}-11} = \varphi''_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$$

gesetzt und ferner

$$(115.)\qquad \operatorname{Mod}k_1 R_2''^{\,r_1-r_\mathfrak{a}}Z_{11}+\operatorname{Mod}k_2 R_2''^{\,r_2-r_\mathfrak{a}}Z_{21}+\dots+\operatorname{Mod}k_{\mathfrak{a}-1}R_2''^{\,r_{\mathfrak{a}-1}-r_\mathfrak{a}}Z_{\mathfrak{a}-11} = Z_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},$$

$$(116.)\qquad \operatorname{Mod}k_1 R_1''^{\,r_1-r_\mathfrak{a}}\varepsilon_{11}+\operatorname{Mod}k_2 R_1''^{\,r_2-r_\mathfrak{a}}\varepsilon_{21}+\dots+\operatorname{Mod}k_{\mathfrak{a}-1}R_1''^{\,r_{\mathfrak{a}-1}-r_\mathfrak{a}}\varepsilon_{\mathfrak{a}-11} = \varepsilon_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}},$$

wo in den beiden letzteren Ausdrücken statt der Mod k auch grössere positive Grössen gesetzt werden können. Man hat alsdann allgemein bei den

$\varphi_{ab}(x) = \varphi'_{ab}(x) + \varphi''_{ab}(x)$ für Werthe von x in dem Kreisringe mit den Radien R'_2 und R''_2

$$(117.)\qquad \operatorname{Mod}\varphi_{ab}(x) \leqq Z_{ab}$$

und für Werthe von x in dem Kreisringe mit den Radien R'_1 und R''_1

$$(118.)\qquad \operatorname{Mod}\varphi''_{ab}(x) \leqq \varepsilon_{ab}, \qquad \operatorname{Mod}\varphi'_{ab}(x) \leqq Z_{ab} + \varepsilon_{ab}.$$

Die Werthe Z_{ab} sind bekannt. Sind Maximalwerthe der Grössen $\varepsilon_{ab} > 0$ vorgeschrieben, so werden die $\varepsilon_{a1} > 0$ gemäss (116.) gewählt, dann werden aus dem Vorhergehenden (104.) bis (111.) die Functionen $\varphi'_{a1}(x)$ ermittelt und aus (113.) die übrigen $\varphi'_{ab}(x)$ bestimmt, *wodurch man alle Functionen* $\varphi'_{ab}(x)$ *als ganze rationale Functionen von* $x-a$ *und* $(x-a)^{-1}$ *erhält, die so beschaffen sind, dass die Differenz* $\varphi_{ab}(x) - \varphi'_{ab}(x) = \varphi''_{ab}(x)$ *für die Werthe* x *in dem Kreisringe mit den Radien* R'_1 *und* R''_1 *die Relation* (118.) *erfüllt.*

c.) Es sind nun die Werthe der Differentialquotienten von $\varphi_{ab}(x)$ zu ermitteln. Man könnte hierzu davon ausgehen, die Werthe der Differentialquotienten von $(x-a)^{-(r_a+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1})}U = \psi_0 S$ zu bestimmen und dabei, wenn $(x-a)^{-(r_a+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1})} = v$ gesetzt wird, die Formeln

$$(119.)\qquad \begin{cases} vU = vu_1\int dx\, u_2 \dots \int u_\varepsilon dx, \\ \dfrac{dvU}{dx} = \dfrac{dvu_1}{dx}\int dx\, u_2 \dots \int u_\varepsilon dx + vu_1u_2\int dx\, u_3 \dots \int u_\varepsilon dx \end{cases}$$

anwenden. Indem man diese Formeln wiederholt anwendet, kommt man zur Darstellung der Differentialquotienten von vU auf eine Summe von Grössen

$$(120.)\qquad \int dx\, u_2 \dots \int u_\varepsilon dx,\quad \int dx\, u_3 \dots \int u_\varepsilon dx,\quad \dots \quad \int u_\varepsilon dx,\quad 1,$$

multiplicirt mit Ausdrücken, die ganze rationale Functionen von v, u und ihren Ableitungen sind. Diese Ausdrücke sind dann nach IV *a.*) und *b.*) zu behandeln.

Anstatt aber auf diese Weise die Werthe der Differentialquotienten von $\varphi_{ab}(x)$ *zu berechnen, ist es am einfachsten, die Grössen* φ'_{ab} *in b.) bei* $\varphi_{ab} = \varphi'_{ab} + \varphi''_{ab}$ *sogleich so zu bestimmen, dass die Moduln der Differentialquotienten von* φ''_{ab} *kleiner als vorgeschriebene Werthe werden.* Hierzu wird folgender Satz angewandt.

Die Function $\mathfrak{P}(\xi)$ habe innerhalb eines Kreises um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius R_1 die Entwickelung

$$(121.) \quad \mathfrak{P}(\xi) = \sum_{0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha,$$

so ist, wenn $\xi = Re^{i\theta}$ gesetzt wird, wo $R < R_1$ ist,

$$(122.) \quad c_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int \mathfrak{P}(\xi)\xi^{-\alpha-1}d\xi = \frac{1}{2\pi}R^{-\alpha}\int_0^{2\pi}\mathfrak{P}(Re^{i\theta})e^{-i\alpha\theta}d\theta \quad (\alpha = -\infty \cdots +\infty).$$

Ist M eine positive Grösse gleich oder grösser als das Maximum des Moduls der Function $\mathfrak{P}(\xi)$ für die Werthe ξ, deren Modul gleich R ist, so ist daher

$$(123.) \quad \operatorname{Mod} c_\alpha \leqq \frac{M}{R^\alpha} \quad (\alpha = -\infty \cdots +\infty).$$

Es werden die Radien R'_1, R''_1 und R', R'' genommen, so dass

$$0 < R'_1 < R' \leqq R'' < R''_1 < R_1,$$

und die Werthe von M für $\operatorname{Mod}\xi = R'_1$ und $\operatorname{Mod}\xi = R''_1$ durch M'_1 und M''_1 bezeichnet. Dann ist

$$(124.) \quad \operatorname{Mod}\sum_{0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq M''_1 \frac{1}{1-\frac{R}{R''_1}}$$

für $\operatorname{Mod}\xi \leqq R < R''_1$, und

$$(125.) \quad \operatorname{Mod}\sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq \frac{M'_1 R'_1}{R} \frac{1}{1-\frac{R'_1}{R}}$$

für $\operatorname{Mod}\xi \geqq R > R'_1$. Es ist ferner

$$(126.) \quad \operatorname{Mod}\frac{d^l}{d\xi^l}\sum_{0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq \frac{d^l}{dR^l}\frac{M''_1 R''_1}{R''_1 - R} = 1.2\ldots l \frac{M''_1 R''_1}{(R''_1 - R)^{l+1}}, \quad R < R''_1$$

$$(127.) \quad \operatorname{Mod}\frac{d^l}{d\xi^l}\sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq (-1)^l \frac{d^l}{dR^l}\frac{M'_1 R'_1}{R - R'_1} = 1.2\ldots l \frac{M'_1 R'_1}{(R - R'_1)^{l+1}}, \quad R > R'_1.$$

Hieraus ergiebt sich für die Werthe ξ in dem Kreisringe mit den Radien R' und R'' (vgl. (20.))

$$(128.) \quad \operatorname{Mod}\frac{d^l\mathfrak{P}(\xi)}{d\xi^l} \leqq 1.2\ldots l\left\{\frac{M''_1 R''_1}{(R''_1 - R'')^{l+1}} + \frac{M'_1 R'_1}{(R' - R'_1)^{l+1}}\right\}.$$

Die letztere Formel wird nun auf die Functionen $\varphi_{ab}(x)$ in *b.*) angewandt, dabei wird jetzt der Kreisring um $x = a$ als Mittelpunkt in Betracht gezogen mit den Radien R' und R'', die zu den in *b.*) genommenen Radien R'_1, R''_1 und R'_2, R''_2 in der Beziehung stehen

$$0 < R'_2 < R'_1 < R' \leqq R'' < R''_1 < R''_2 < R_1.$$

Es ist nach (117.), (118.) und (128.) für die Werthe ξ in dem Kreisringe mit den Radien R' und R''

$$(129.)\quad \operatorname{Mod}\frac{d^l\varphi_{ab}(x)}{dx^l} \leqq 1.2\ldots l\left\{\frac{Z_{ab}R''_1}{(R''_1-R'')^{l+1}}+\frac{Z_{ab}R'_1}{(R'-R'_1)^{l+1}}\right\},$$

$$(130.)\quad \operatorname{Mod}\frac{d^l\varphi''_{ab}(x)}{dx^l} \leqq 1.2\ldots l\left\{\frac{\varepsilon_{ab}R''_1}{(R''_1-R'')^{l+1}}+\frac{\varepsilon_{ab}R'_1}{(R'-R'_1)^{l+1}}\right\},$$

$$(131.)\quad \operatorname{Mod}\frac{d^l\varphi'_{ab}(x)}{dx^l} \leqq 1.2\ldots l\left\{\frac{(Z_{ab}+\varepsilon_{ab})R''_1}{(R''_1-R'')^{l+1}}+\frac{(Z_{ab}+\varepsilon_{ab})R'_1}{(R'-R'_1)^{l+1}}\right\}.$$

Sind bei den Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung die Maximalwerthe der rechten Seite in (130.) vorgeschrieben, ***so werden die*** $\varepsilon_{ab} > 0$ ***zunächst dieser Bedingung gemäss gewählt, nun die Functionen*** $\varphi'_{ab}(x)$ ***nach b.) ermittelt, dann sind zugleich die Relationen*** (129.) ***bis*** (131.) ***erfüllt.***

d.) Jetzt wird bei sämmtlichen m Integralen der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ No. 1 (1.) bei $x = a$ unter der Entwickelungsform No. 1 (21.) der im Vorhergehenden bezeichnete Radius R_1 übereinstimmend genommen, alsdann sollen auch die in *c.*) genannten Radien R'_2, R''_2, R'_1, R''_1, R' und R'' bei allen Integralen dieselben sein. Ein Integral

$$(132.)\quad Y = (x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}(\varphi_{a1}(x)+\varphi_{a2}(x)\log(x-a)+\cdots+\varphi_{aq_a}(x)(\log(x-a))^{q_a-1})$$

erhält nun die Darstellung

$$(133.)\qquad Y = Y'+Y'',$$

$$(134.)\quad Y' = (x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}(\varphi'_{a1}(x)+\varphi'_{a2}(x)\log(x-a)+\cdots+\varphi'_{aq_a}(x)(\log(x-a))^{q_a-1}),$$

$$(135.)\quad Y'' = (x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}(\varphi''_{a1}(x)+\varphi''_{a2}(x)\log(x-a)+\cdots+\varphi''_{aq_a}(x)(\log(x-a))^{q_a-1}),$$

wo $\varphi'_{ab}(x)$ und $\varphi''_{ab}(x)$ aus *b.*) hervorgehen.

Es möge eine positive Grösse gleich oder grösser als das Maximum des Moduls von $\log(x-a)$ für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R'_1 und R''_1 durch L, und eine positive Grösse gleich oder grösser als das Maximum des Moduls von $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}$ für dieselben Werthe von x durch M bezeichnet werden. Ist

$$x-a = Re^{i\theta},\quad 0 \leqq \theta \leqq 2\pi,\quad \log(x-a) = \log R + i\theta,$$

so kann man L gleich dem grössten der Werthe

$$[(\log R'_1)^2+(2\pi)^2]^{\frac{1}{2}}\quad \text{oder}\quad [(\log R''_1)^2+(2\pi)^2]^{\frac{1}{2}}$$

setzen, M kann man gleich oder grösser als $e^{\operatorname{Mod}(r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1})L}$ nehmen. Dann ist für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R'_1 und R''_1

$$(136.)\quad \operatorname{Mod} Y \leqq M(Z_{a1}+Z_{a2}L+\cdots+Z_{aq_a}L^{q_a-1}),$$

$$(137.)\quad \operatorname{Mod} Y'' \leqq M(\varepsilon_{a1}+\varepsilon_{a2}L+\cdots+\varepsilon_{aq_a}L^{q_a-1}),$$

$$(138.)\quad \operatorname{Mod} Y' \leqq M(Z_{a1}+\varepsilon_{a1}+(Z_{a2}+\varepsilon_{a2})L+\cdots+(Z_{aq_a}+\varepsilon_{aq_a})L^{q_a-1}).$$

Hier sind die positiven Grössen $Z_{ab} \geqq \text{Mod}\, \varphi_{ab}(x)$ aus *a.*) und *b.*) bekannt, die ε_{ab} sind positive Grössen >0, so dass $\varepsilon_{ab} \geqq \text{Mod}\, \varphi''_{ab}(x)$. Bildet man aus den Ausdrücken (133.), (134.), (135.), $\frac{d^s Y}{dx^s}$, $\frac{d^s Y'}{dx^s}$, $\frac{d^s Y''}{dx^s}$ und setzt in die erhaltenen Ausdrücke statt $\frac{d^l \varphi_{ab}}{dx^l}$, $\frac{d^l \varphi'_{ab}}{dx^l}$, $\frac{d^l \varphi''_{ab}}{dx^l}$ bez. die Grössen auf der rechten Seite von (129.) bis (131.), für die Differentialquotienten von $(x-a)^{r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1}}$ und $(\log(x-a))^\kappa$ positive Grössen gleich oder grösser als die Maxima der Moduln jener Functionen für x in dem Kreisringe mit den Radien R' und R'', so erhält man Ausdrücke gleich oder grösser als

$$(139.) \qquad \text{Mod}\frac{d^s Y}{dx^s},\ \text{Mod}\frac{d^s Y'}{dx^s},\ \text{Mod}\frac{d^s Y''}{dx^s}$$

für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R' und R''.

Wird nun eine Grösse als ganze rationale Function der Integrale Y und ihrer Ableitungen dargestellt (vgl. 4), und soll der Werth einer solchen Grösse bis auf eine Differenz kleiner als eine vorgeschriebene, beliebig kleine Grösse ermittelt werden, so wird, indem man $Y = Y' + Y''$ setzt, jene Function in zwei Theile zerlegt, von denen der eine aus der ursprünglichen Function dadurch hervorgeht, dass Y' und seine Ableitungen an Stelle von Y und dessen Ableitungen treten; der zweite Theil soll dann dem Modul nach kleiner als die vorgeschriebene Grösse werden. Hierzu werden in denselben statt Y', Y'', $\frac{d^s Y'}{dx^s}$, $\frac{d^s Y''}{dx^s}$ die Ausdrücke (137.) bis (139.) gleich oder grösser als $\text{Mod}\, Y'$, $\text{Mod}\, Y''$, $\text{Mod}\frac{d^s Y'}{dx^s}$, $\text{Mod}\frac{d^s Y''}{dx^s}$ und für die Coefficienten ihre Moduln oder grössere Werthe eingesetzt. Dann sind Maximalwerthe der Grössen ε_{ab} so zu bestimmen, dass letzterer Ausdruck kleiner als die vorgeschriebene Grösse wird.

Nun werden nach *a.*) und *b.*) die Functionen $\varphi'_{ab}(x)$ als ganze rationale Functionen von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ so bestimmt, dass für die Werthe x in dem Kreisringe mit den Radien R'_1 und R''_1 die Relation $\text{Mod}\, \varphi''_{ab} \leqq \varepsilon_{ab}$ gilt.

Alsdann liefert die ganze rationale Function, in welcher statt Y und dessen Ableitungen Y'* (134.) *und seine Ableitungen stehen, dadurch, dass die in diesen Ausdrücken vorkommenden Functionen $\varphi'_{ab}(x)$ ganze rationale Functionen von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ sind mit Coefficienten, die sich rational aus gegebenen Constanten zusammensetzen, den gesuchten Werth, wenn x in dem Kreisringe mit den Radien R' und R'' liegt.

Was die beliebig angenäherte Berechnung von $\log(x-a)$ und $(x-a)^r = e^{r\log(x-a)}$ angeht, so ist Dieses zu bemerken. Es sei $x-a=\varrho e^{i\theta}$ gesetzt, $\theta = 0\ldots 2\pi$, und $\log(x-a) = \log\varrho + i\theta$. Ist $x-a = u+iv$, u und v reell, so ist $\log\varrho = \frac{1}{2}\log(u^2+v^2)$, $\theta = \operatorname{arctang}\frac{v}{u}+\nu\pi$, wo $\nu = 0, 1, 2$. Ist $\varrho^2 > 1$, so wird $\log\varrho^2 = -\log\frac{1}{\varrho^2}$ genommen; ist $x > 1$, so wird $\operatorname{arctang} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctang}\frac{1}{x}\cdot$ Nun kann man für Werthe ξ, deren Modul < 1 ist, von $\log(1+\xi) = \int\frac{d\xi}{1+\xi}$ und von $\operatorname{arctang}\xi = \int\frac{d\xi}{1+\xi^2}$ durch die Potenzreihen nach (18.) einen beliebig angenäherten Werth berechnen, indem sich ein Werth grösser als das Maximum des Moduls der Reihe für $\operatorname{Mod}\xi = R$ mittels der Reihe und der Function ohne Weiteres ergiebt.

Wird $(x-a)^r = e^{r\omega}(1+\varepsilon)$ gesetzt, wo ω ein beliebig angenäherter Werth für $\log(x-a)$, ε beliebig klein ist, so geschieht die beliebig angenäherte Berechnung von $e^{r\omega}$ mittels der Exponentialreihe nach (18.).

e.) In der Entwickelung der Function $\varphi_{ab}(x)$ *b.*) von der Form (121.) für $\xi = x-a$ ist der Coefficient $c_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = -\infty\cdots+\infty)$ gleich der Summe der gleichstelligen Coefficienten in den Entwickelungen von $\varphi'_{ab}(x)$ und $\varphi''_{ab}(x)$. Der Coefficient in der Entwickelung von $\varphi'_{ab}(x)$ ist bekannt, der Coefficient in der Entwickelung von $\varphi''_{ab}(x)$ hat einen Modul der gleich oder kleiner als $\frac{\varepsilon_{ab}}{R_1'^{\mathfrak{a}}}$ und als $\frac{\varepsilon_{ab}}{R_1''^{\mathfrak{a}}}$ ist (123.). Die Grösse ε_{ab} kann unabhängig von R_1' und R_1'' beliebig klein gewählt werden, *man kann also den Werth des Coefficienten $c_\mathfrak{a}$ in der Entwickelung von $\varphi_{ab}(x)$ beliebig angenähert ermitteln.*

Bei der Entwickelung der Form (121.) für $\xi = x-a$ von der in No. 2 betrachteten Function $e^{-w_k}\varphi_{ab}(x)$, kann man den Werth des Coefficienten von $(x-a)^\mathfrak{a}$ in derselben Weise beliebig angenähert bestimmen. Zu dem Zwecke hat man $U(x-a)^{-(r_a+\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1})}$ in *a.*) noch mit e^{-w_k} zu multipliciren, und es ist dann $e^{w_0-w_k}\overline{y}_{01}$ in derselben Weise, wie dort $e^{w_0}\overline{y}_{01}$ zu behandeln. Man erhält also den Werth des Coefficienten von $(x-a)^\mathfrak{a}$ in der Entwickelung von $e^{-w_k}\varphi_{ab}(x)$ bis auf eine Grösse, deren Modul gleich oder kleiner als $\frac{\varepsilon_{ab}}{R_1'^{\mathfrak{a}}}$ und als $\frac{\varepsilon_{ab}}{R_1''^{\mathfrak{a}}}$ ist. Ist $R_1' < 1$ gewählt, so nehmen die Werthe $\frac{\varepsilon_{ab}}{R_1'^{\mathfrak{a}}}$ mit (algebraisch) abnehmendem Zeiger $\mathfrak{a}$ ins Unendliche ab. Sobald der für den Coefficienten von $(x-a)^\mathfrak{a}$ $\mathfrak{a} < 0$ erhaltene angenäherte Werth

dem Modul nach grösser als $\frac{\varepsilon_{ab}}{R_1'^{\alpha}}$ ist, verschwindet der Coefficient von $(x-a)^{\alpha}$ nicht. Ergiebt sich auf diese Weise, dass ein Coefficient mit negativem Zeiger in der Entwickelung von $e^{-w_k}(x-a)^{\nu}\varphi_{ab}(x)$, wo ν die in No. 1 *e.*) genannte ganze Zahl ist, nicht verschwindet, so muss die Entwickelung unendlich viele von Null verschiedene Coefficienten mit negativem Zeiger enthalten.

4.

Es soll die Fortsetzung eines Integrales der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ (1.) in No. 1, welches bei einem Punkte entwickelt ist, längs einer sich selbst nicht schneidenden Linie, fortwährend auf einer Seite derselben, bis zu irgend einem anderen Punkte hin durchgeführt und die erhaltene Function durch ein bei letzterem Punkte entwickeltes Integralsystem linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt werden.

I. Zu diesem Zwecke wird nach Abh. Bd. 87 No. 6 *a.*) und *b.*) durch die singulären Punkte der Differentialgleichung eine sich selbst nicht schneidende, in sich zurücklaufende Linie L gezogen. Diese theilt die Constructionsebene in zwei Theile, im Innern jedes dieser Theile ist ein Integral einwerthig und stetig. In einem dieser Theile T_1 wird bei jedem singulären Punkte innerhalb des Bezirkes dieses Punktes ein System linearunabhängiger Integrale aufgestellt. Das Integralsystem bei einem singulären Punkte wird zu einem auf der Linie L liegenden benachbarten singulären Punkte in dem Gebiete T_1 fortgesetzt und durch das bei diesem entwickelte Integralsystem ausgedrückt. Die in diesen Ausdrücken vorkommenden constanten Coefficienten bilden eine auf letzteres Integralsystem angewandte Substitution, die durch A bezeichnet werde. Die inverse Substitution A', auf das erste Integralsystem angewandt, liefert das Resultat der in T_1 genommenen Fortsetzung des zweiten Integralsystemes zu dem ersten Punkte hin. Es wird ferner jedes Integralsystem bei einem singulären Punkte in einem Gebiete, welches von singulären Punkten nur diesen enthält, in positiver Richtung (vgl. No. 1 *a.*)) längs der Begrenzung dieses Gebietes um den singulären Punkt herumgeführt und das Resultat durch das ursprüngliche Integralsystem ausgedrückt, die Coefficienten in diesen Ausdrücken bilden die Substitution B. Die inverse Substitution B', auf das ursprüngliche System angewandt, ergiebt das Resultat des Umganges in umgekehrter Richtung.

Wenn nun ein Integral bei irgend einem Punkte entwickelt ist und längs einer vorgeschriebenen Linie zu einem anderen Punkte fortgesetzt und durch ein bei diesem entwickeltes Integralsystem ausgedrückt werden soll, so wird das Integral zunächst durch die Integrale bei einem der singulären Punkte ausgedrückt, alsdann der vorgeschriebene Weg durch einen anderen ersetzt, der aus Uebergängen von einem singulären Punkte zu den benachbarten, die durch die Substitutionen A und A' vermittelt werden, und aus Umgängen um die singulären Punkte, die durch die Substitutionen B und B' gegeben werden, besteht, und zuletzt das Integralsystem bei einem der singulären Punkte durch das bei dem Endpunkte der vorgeschriebenen Linie entwickelte System ausgedrückt. (Vgl. Abh. Bd. 87 No. 6 *c.*) (Schluss)).

II. In der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ No. 1 (1.) soll nun bei jedem singulären Punkte der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ eine Darstellung wie (4.) in No. 1 haben, in welcher die Wurzeln der Exponentengleichungen die in No. 1 vor *a.*) angegebene Eigenschaft besitzen. Bei dem singulären Punkte $x = a$ haben die Integrale jeder Gruppe die Entwickelung No. 1 (21.). Ist $x = \infty$ singulär, also nach Substitution von $x = t^{-1}$ der Punkt $t = 0$, so wird bei $t = 0$ die Entwickelung der Integrale der Form No. 1 (21.) gebildet und $t = x^{-1}$ gesetzt. Dann werden diese Entwickelungen in dem in T_1 liegenden Theile des Bezirkes des singulären Punktes fixirt in Bezug auf den Zweig von $\log(x-a)$ in $(x-a)^r = e^{r\log(x-a)}$ und $(\log(x-a))^n$, entsprechend bei $x = \infty$ in Bezug auf $\log\left(\frac{1}{x}\right)$. Dabei wird bei einem und demselben singulären Punkte $x = a$ der Werth von $\log(x-a)$ in $(x-a)^r$ in den Ausdrücken aller Integrale übereinstimmend genommen, und es soll der Werth von $\log(x-a)$ in $(\log(x-a))^n$ in den verschiedenen Gruppen übereinstimmen; entsprechend bei $x = \infty$.

a.) Die Substitutionen B erhält man durch die Formeln No. 1 (25.), die inversen B' entweder aus B oder durch das Verfahren, wodurch B in No. 1 gewonnen ist. Die Substitutionen A werden in folgender Weise erhalten. Die Werthe der bei einem singulären Punkte entwickelten Integrale und ihrer Ableitungen bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung werden in einem nichtsingulären Punkte des Entwickelungsgebietes aufgestellt. Bei diesem nichtsingulären Punkte wird ein System von Integralen entwickelt und durch dieses das erstere System ausgedrückt und umgekehrt. Nun ist der Uebergang zu dem bei einem anderen nichtsingulären Punkte entwickelten Systeme zu vollziehen.

Die Werthe der bei dem singulären Punkt $x = a$ entwickelten Integrale No. 1 (21.) und ihrer Ableitungen bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung werden nun innerhalb des Bezirkes dieses Punktes in dem in No. 3 betrachteten Kreisringe mit den Radien R' und R'' in dem Gebiete T_1 dargestellt. Jeder Punkt dieses Ringes ist ein nichtsingulärer. Ein solcher Punkt $x = a'$ in T_1 wird herausgenommen und die Integrale No. 1 (21.), die durch $y_{0k} (k = 1 \dots m)$ bezeichnet werden, sollen durch ein bei $x = a'$ entwickeltes System von Integralen $y_{1k} (k = 1 \dots m)$ ausgedrückt werden und umgekehrt. Die Integrale $y_{1k} (k = 1 \dots m)$ seien so beschaffen, dass

$$(1.) \qquad \left(\frac{d^{k-1} y_{1k}}{dx^{k-1}}\right)_{x=a'} = 1, \quad \left(\frac{d^{\mathfrak{a}} y_{1k}}{dx^{\mathfrak{a}}}\right)_{x=a'} = 0, \quad \mathfrak{a} = \begin{cases} 0 \dots k-2, \\ k \dots m-1 \end{cases}.$$

Die Entwickelungen derselben bei dem nicht singulären Punkte sind durch diese Bedingungen bestimmt und die Integrale linearunabhängig. Dann wird

$$(2.) \qquad y_{0k} = c_{k1} y_{11} + c_{k2} y_{12} + \dots + c_{km} y_{1m}$$

und wegen der Bedingungen (1.) erhält man

$$(3.) \qquad c_{k\mathfrak{b}} = \left(\frac{d^{\mathfrak{b}-1} y_{0k}}{dx^{\mathfrak{b}-1}}\right)_{x=a'}.$$

Man kann nun nach No. 3 für y_{0k} und seine Ableitungen in dem Kreisringe mit den Radien R' und R'', demnach für die Constanten $c_{k\mathfrak{b}}$ Grössen angeben, die gleich oder grösser als $\operatorname{Mod} c_{k\mathfrak{b}}$ sind, und eine Darstellung von $c_{k\mathfrak{b}}$ aufstellen unter der Form $c' + c''$, wo $\operatorname{Mod} c''$ kleiner als eine vorgeschriebene beliebig kleine Grösse ε ist, c' nach No. 3 IV. *d.*) berechnet wird.

Es ist ferner das Gleichungssystem

$$(4.) \quad y_{0k} = (y_{0k})_{x=a'} y_{11} + \left(\frac{dy_{0k}}{dx}\right)_{x=a'} y_{12} + \dots + \left(\frac{d^{m-1} y_{0k}}{dx^{m-1}}\right)_{x=a'} y_{1m} \quad (k = 1 \dots m)$$

umzukehren. Die Determinante desselben verschwindet nicht, weil die Functionen y_{0k} $(k = 1 \dots m)$ linearunabhängig sind. Diese Determinante D ist die Differentialdeterminante der Integrale y_{0k} $(k = 1 \dots m)$ im Punkt $x = a'$ und durch No. 1 (13.) bis (18.) gegeben. Die Coefficienten in dem umgekehrten Systeme (4.) seien durch k bezeichnet. Für k ist eine Grösse $\geqq \operatorname{Mod} k$ anzugeben, und wenn $k = k' + k''$ gesetzt und $\operatorname{Mod} k''$ beliebig klein genommen wird, so ist k' zu berechnen. k ist von der Form $\frac{\varDelta}{D}$. Setzt man $\varDelta = \varDelta' + \varDelta''$, $D = D' + D''$, so wird

$$(5.)\qquad \frac{\varDelta}{D} = \frac{\varDelta'}{D'} + \frac{D'\varDelta'' - \varDelta' D''}{DD'}.$$

Eine positive Grösse gleich oder kleiner als $\operatorname{Mod} D$ sei δ. Man erhält dieselbe aus No. 1 (16.). Ebenso sei eine positive Grösse $\beta \geqq \operatorname{Mod} D$ ermittelt und eine solche $\gamma \geqq \operatorname{Mod} \varDelta$ (nach No. 3 IV.). Alsdann ist $\frac{\gamma}{\delta} \geqq \operatorname{Mod} k$. Nun ist

$$(6.)\qquad \operatorname{Mod}\left\{\frac{D'\varDelta'' - \varDelta' D''}{DD'}\right\} \leqq \frac{(\beta + \operatorname{Mod} D'')\operatorname{Mod}\varDelta'' + (\gamma + \operatorname{Mod}\varDelta'')\operatorname{Mod} D''}{\delta(\delta - \operatorname{Mod} D'')},$$

wenn $\delta - \operatorname{Mod} D'' > 0$ ist. Soll die rechte Seite in (6.) kleiner als eine vorgeschriebene beliebig kleine Grösse werden, so sind Maximalwerthe von $\operatorname{Mod}\varDelta''$ und $\operatorname{Mod} D''$ dieser Bedingung gemäss zu wählen. Man erhält die Werthe von $\varDelta'$ und D' aus No. 3 IV. *d*.). Ist der Punkt $x = \infty$ singulär, so werden nach Substitution von $x = \frac{1}{t}$ die Werthe der Integrale und ihrer Ableitungen in einem nichtsingulären Punkt t_1 bestimmt und hieraus die Werthe der von x abhängenden Integrale und ihrer Ableitungen in einem nichtsingulären Punkt $x = a' = \frac{1}{t_1}$ in dem Gebiete T_1 hergeleitet. Für die Determinante D der von x abhängenden Integrale erhält man, wenn diejenige der von t abhängenden Integrale D' ist, nach Abh. B. 87 No. 5 (10.) $D = (-x^{-2})^{\frac{m(m-1)}{2}} D'$.

Nun sind die bei zwei nichtsingulären Punkten in T_1 entwickelten Integralsysteme (1.) in T_1 fortzusetzen und durch einander auszudrücken. Zwischen beiden Punkten können noch andere nichtsinguläre eingeschoben und bei denselben Integralsysteme entwickelt werden, und zwar sollen zwei auf einander folgende a und b so angenommen werden, dass man durch b einen Kreis legen kann, innerhalb dessen Peripherie a und ausserhalb derselben alle singulären Punkte der Differentialgleichung liegen. Dieser Kreis wird durch eine rationale Substitution ersten Grades $x = R(\xi)$ conform auf den Kreis in der ξ-Ebene um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 abgebildet, so dass dem Punkte $x = a$ der Punkt $\xi = 0$, dem Punkte $x = b$ der Punkt $\xi = 1$ entspricht. Diese Substitution ist in Abh. B. 87 No. 1 hergeleitet. Die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ gehe in $G_m(y, \xi) = 0$ über. Der charakteristische Index bleibt in entsprechenden Punkten ungeändert, und einem nichtsingulären Punkte der einen entspricht ein nichtsingulärer der anderen, einem ausserwesentlich singulären entspricht ein

ausserwesentlich singulärer Punkt. In die bei den Punkten $x = a$ und $x = b$ entwickelten Integralsysteme wird $x = R(\xi)$ eingesetzt, und es werden die Werthe der von ξ abhängenden Integrale und ihrer $m-1$ ersten nach ξ genommenen Ableitungen für $\xi = 0$ und $\xi = 1$ aufgestellt. Das Integralsystem von $G_m(y, \xi) = 0$ bei $\xi = 0$ sei durch y_{0k} $(k = 1 \dots m)$ bezeichnet, das Integralsystem bei $\xi = 1$ wird durch ein bei $\xi = 1$ entwickeltes Integralsystem, welches die Bedingungen (1.) für $a' = 1$ erfüllt, ausgedrückt, dieses sei durch y_{1k} $(k = 1 \dots m)$ bezeichnet. Dann hat man das System y_{0k} $(k = 1 \dots m)$ durch das System y_{1k} $(k = 1 \dots m)$ darzustellen. Es finden wieder die Gleichungen (2.) und (3.) statt bei $x = \xi$, $a' = 1$. Für die Constanten $\left(\frac{d^{\alpha-1} y_{0k}}{d\xi^{\alpha-1}}\right)_{\xi=1}$ kann man ebenfalls eine Grösse, die die Constante dem Modul nach übertrifft, aufstellen und eine Darstellung $c' + c''$ geben, wo c'' dem Modul nach beliebig klein ist, c' eine ganze rationale Function von ξ für $\xi = 1$, so dass der Werth derselben sich berechnen lässt. Man hat zu dem Zwecke die Sätze No. 3 II. anzuwenden. Auf die Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ wird Formel No. 3 (40.) angewandt. Hier ist der Radius R_0 *grösser als* 1 und kleiner als der des Bezirkes von $\xi = 0$ zu nehmen, was angeht, da die singulären Punkte der Differentialgleichung bekannt sind. Der Werth von M_0 in (40.) wird aus No. 3 (44.) entnommen. Nimmt man nun $1 < R_1 < R_2 < R_0$, so liefert der Ausdruck in No. 3 (40.) für $R = R_2$ eine Grösse, die gleich oder grösser ist als $\operatorname{Mod} y_{0k}$ für $\operatorname{Mod} \xi \leqq R_2$, und setzt man in No. 3 (20.) diese Grösse für M ein, $R = R_2$, so erhält man eine Grösse, gleich oder grösser als $\operatorname{Mod} \frac{d^i y_{0k}}{d\xi^i}$ für $\operatorname{Mod} \xi \leqq R_1$. Werden diese Grössen für M in der Entwickelung No. 3 (18.) bei y_{0k} und $\frac{d^i y_{0k}}{d\xi^i}$ und $R = R_1$, $R' = 1$ gesetzt, so kann man den Stellenzeiger ν so wählen, dass der Rest beliebig klein wird. Nach demselben Verfahren ist das Integralsystem bei $x = b$ durch das bei $x = a$ auszudrücken.

b.) Sollen die Substitutionen A für die Integralsysteme bei zwei singulären Punkten, bei denen der ***charakteristische Index gleich Null ist,*** bestimmt werden, wenn der eine Punkt innerhalb des von einem Kreise begrenzten Gebietes, der andere auf der Begrenzung liegt und die übrigen singulären Punkte ausserhalb dieses Gebietes sich befinden, wobei auch der Fall, dass der innerhalb des Gebietes befindliche singuläre Punkt im Unendlichen liegt, nicht ausgeschlossen ist, so wird gemäss Abh. B. 87 No. 6 *d.*) durch

eine rationale Substitution ersten Grades $x = R(\xi)$ dieser Fall auf den zurückgeführt, dass der eine singuläre Punkt $\xi = 0$, der andere $\xi = 1$, bei beiden der charakteristische Index gleich Null ist und die übrigen singulären Punkte ausserhalb der Peripherie des um $\xi = 0$ als Mittelpunkt durch $\xi = 1$ gelegten Kreises liegen. Alsdann erhält man für jede Constante in der Substitution A nach Abh. Bd. 87 No. 3, 4, 10 einen analytischen Ausdruck, der sich durch eine Reihe nach Potenzen von ξ mit positiven ganzzahligen Exponenten für $\xi = 1$ darstellt, deren Convergenz mittels der *Fourier*schen Reihe bewiesen worden ist. Die beliebig angenäherten Werthe dieser Constanten erhält man nach *a.*); vgl. dabei Abh. Bd. 87 No. 2 I.

c.) Um ein Integral durch das bei einem singulären Punkte entwickelte System auszudrücken, seien von diesem Integrale und seinen $m-1$ ersten Ableitungen in einem nichtsingulären Punkte die Werthe gegeben, dann wird wie in *a.*) verfahren. Ist das Integral bei einem singulären Punkte, dessen charakteristischer Index gleich Null ist, entwickelt, so tritt das Verfahren Abh. Bd. 87 No. 2 I ein.

Das Resultat der Fortsetzung eines Integrales von einem Punkte zu einem anderen stellt sich durch Zusammensetzung der Substitutionen als eine ganze rationale Function von Grössen C dar, die gleich $C'+C''$ gesetzt werden. Diese Function wird in zwei Theile zerlegt, von denen der eine aus der ursprünglichen Function entsteht, indem C' statt C eintritt, der zweite soll beliebig klein gemacht werden. In diesen wird statt C' und C'' bezüglich $\operatorname{Mod} C + \operatorname{Mod} C''$ und $\operatorname{Mod} C''$ gesetzt, die Maximalwerthe von $\operatorname{Mod} C''$ werden so gewählt, dass der erhaltene Ausdruck kleiner als eine vorgeschriebene Grösse wird. Die Werthe C' werden dann nach den früheren Angaben berechnet.

III. *a.*) Man braucht die Substitutionen A und B, von denen in I und II die Rede war, nur in Bezug auf die bei den ***wesentlich singulären*** Punkten entwickelten Integralsysteme zu nehmen, da bei einem ausserwesentlich singulären Punkte die Integrale einwerthig und stetig bleiben. Es ist, abgesehen von der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$, immer wenigstens ein wesentlich singulärer Punkt vorhanden. Denn wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit einwerthigen Coefficienten und singulären Punkten in endlicher Zahl nur ausserwesentlich singuläre Punkte enthielte, so würden die Integrale allenthalben im Endlichen und Unendlichen einwerthige und stetige analytische Functionen sein, müssten mithin Constante

sein, es könnten also nicht mehrere linearunabhängige vorkommen. Dies trifft nur bei der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = 0$ zu, die überhaupt keinen singulären Punkt enthält.

Die Berechnung der Substitutionen A für die Integralsysteme bei zwei auf einander folgenden wesentlich singulären Punkten bleibt unverändert, wie in II *a.*) angegeben ist. Der Uebergang von einem bei irgend einem Punkte entwickelten Integralsysteme zu dem bei einem wesentlich singulären entwickelten wird ebenfalls, wie in II *c.*) angegeben ist, vollzogen, indem, wenn jenes Integralsystem bei einem ausserwesentlich singulären Punkte entwickelt war, die Werthe der Integrale und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen in einem nichtsingulären Punkte aufgestellt werden, wie dies bei der Berechnung der Substitutionen A in II *a.*) geschehen ist.

Wenn bei zwei singulären Punkten $\xi = 0$ und $\xi = 1$ der charakteristische Index gleich Null ist und auf dem Kreise mit $\xi = 0$ als Mittelpunkt und dem Radius 1 ausser etwa $\xi = 0$ und $\xi = 1$ nur ausserwesentlich singuläre Punkte liegen, so bestehen die in II *b.*) bezeichneten analytischen Ausdrücke für die Constanten in der Substitution A und werden in derselben Weise hergeleitet, wie wenn die ausserwesentlich singulären Punkte nicht vorhanden sind (Abh. B. 87 No. 6 *e.*)). Dieses beruht auf dem Satze: Wenn auf der Peripherie des Bezirkes eines Punktes nur ausserwesentlich singuläre Punkte liegen, so müssen in der allgemeinen Darstellung eines Integrales von der Form No. 1 (21.) die Functionen φ_{ab} Entwickelungen durch Potenzreihen haben, welche weiter als in dem Bezirke des Punktes convergiren, jedenfalls innerhalb des Kreises um diesen Punkt als Mittelpunkt, der durch den nächsten wesentlich singulären Punkt geht, was aus den homogenen linearen Relationen mit constanten Coefficienten zwischen den Functionen $(x-a)^r\varphi$, die No. 1 Schluss von *a.*) betrachtet sind (vgl. Abh. Bd. 87 No. 1 (20.)), und der Eigenschaft der Integrale, dass sie bei einem ausserwesentlich singulären Punkt einwerthig und stetig sind, hervorgeht.

b.) Der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ mögen die Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung $\mathfrak{a}^{\text{ter}}$ Ordnung, wo $\mathfrak{a} < m$ ist, mit rationalen Coefficienten $f_{\mathfrak{a}}(y, x) = 0$ genügen (vgl. No. 9 I), und bei zwei singulären Punkten von $F_m = 0$ seien Systeme von $\mathfrak{a}$ Integralen von $f_{\mathfrak{a}} = 0$ entwickelt. Es sollen nun die $\mathfrak{a}$ Integrale bei dem ersten Punkte in das Gebiet des zweiten fortgesetzt und durch die $\mathfrak{a}$ Integrale bei letzterem Punkt ausgedrückt werden. Die $\mathfrak{a}$ Integrale bei jedem der beiden singulären

Punkte werden in einem nichtsingulären Punkte von $F_m = 0$ und $f_a = 0$ durch ein bei diesem entwickeltes Integralsystem von $f_a = 0$ ausgedrückt und umgekehrt, wie in II *a*.). Man hat dann in zwei nichtsingulären Punkten von $F_m = 0$ und $f_a = 0$ ein System von Integralen von $f_a = 0$ und das eine System in das Entwickelungsgebiet des anderen fortzusetzen und durch letzteres System auszudrücken. Hier können andere nichtsinguläre Punkte von $F_m = 0$ und $f_a = 0$ eingeschoben werden, so dass zwei auf einander folgende Punkte a und b so liegen, dass durch b ein Kreis gelegt werden kann, innerhalb dessen Peripherie a und ausserhalb derselben alle singulären Punkte von $F_m = 0$ liegen; es dürfen also auf dieser Kreisfläche *ausserwesentlich singuläre Punkte von* $f_a = 0$ sich befinden. Dieser Kreis werde durch eine rationale Substitution ersten Grades $x = R(\xi)$ conform auf den Kreis in der ξ-Ebene um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 abgebildet, so dass $x = a$ $\xi = 0$ und $x = b$ $\xi = 1$ entspricht. Durch diese Substitution gehen $F_m(y, x) = 0$ in $G_m(y, \xi) = 0$ und $f_a(y, x) = 0$ in $g_a(y, \xi) = 0$ über. Dann liegt auf der Kreisfläche mit $\xi = 0$ als Mittelpunkt und dem Radius 1 *kein* singulärer Punkt von $G_m(y, \xi) = 0$. Die Integrale von $f_a = 0$ bei a und b werden durch solche von $g_a = 0$ bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ ausgedrückt, dieselben seien y_{0k} $(k = 1 \ldots \mathfrak{a})$ bezüglich y_{1k} $(k = 1 \ldots \mathfrak{a})$, wobei die bei $\xi = 1$ die Bedingungen (1.) für $x = \xi$, $a' = 1$, erfüllen sollen. Dann finden wieder die Gleichungen (2.) und (3.) für $x = \xi$, $a' = 1$, $m = \mathfrak{a}$ statt. *Die Werthe von* $\left(\frac{d^{\mathfrak{b}} y_{0k}}{d\xi^{\mathfrak{b}}}\right)_{\xi=1}$ $(\mathfrak{b} = 0 \ldots \mathfrak{a}-1)$ *kann man nun mittels der Differentialgleichung* $G_m(y, \xi) = 0$, *der die Integrale* y_{0k} *genügen, berechnen* durch das Verfahren, welches in II Schluss von *a*.) auseinandergesetzt ist, so dass man hierbei die etwa vorhandenen ausserwesentlich singulären Punkte auf der oben genannten Kreisfläche nicht zu kennen braucht. Durch dasselbe Verfahren wird das Integralsystem von $f_a = 0$ bei b durch das bei a ausgedrückt. Ist ein Integralsystem von $f_a = 0$ bei einem nichtsingulären Punkt dieser Differentialgleichung entwickelt und der Uebergang zu einem singulären Punkt zu bilden, so geschieht dieses wiederum durch das eben auseinandergesetzte Verfahren mittels der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$.

c.) Die Coefficienten einer homogenen linearen Differentialgleichung seien allenthalben einwerthige analytische Functionen, die nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden. Durch eine rationale Substitution ersten Grades kann ein wesentlich singulärer Punkt ins Unendliche projicirt werden. Man betrachte nun den Fall, dass im Endlichen nur ein

wesentlich singulärer Punkt übrig bleibt, die übrigen singulären Punkte daselbst ausserwesentlich singuläre sind. Wenn man die Entwickelung der Integrale bei dem wesentlich singulären Punkte in der allgemeinen Form, No. 1 (21.) nimmt, so ***convergiren die Potenzreihen, die die Functionen φ darstellen, in der ganzen Ebene*** (die mit negativen Exponenten, abgesehen von $x = a$) nach dem Satze Schluss von *a.*), wie bereits in Abh. Bd. 87 No. 6 *e.*) angegeben ist. (Ebenso wenn im Endlichen kein wesentlich singulärer Punkt mehr vorhanden ist, und man die Entwickelungen bei irgend einem Punkte nimmt.) ***Auf diesen Fall wird derjenige zurückgeführt,*** wenn von allen singulären Punkten im Endlichen a_1 bis $a_\varkappa$, abgesehen von einem $a_\varkappa$, vorausgesetzt wird, dass der charakteristische Index bei denselben gleich Null ist, und die Integrale bei jedem der Punkte a_1 bis $a_{\varkappa-1}$ zu einer einzigen Gruppe gehören, in welcher kein Logarithmus vorkommt. Ist dann bei a_α $(\alpha = 1 \dots \varkappa - 1)$ die Wurzel der Exponentengleichung mit dem kleinsten reellen Theile $r^{(\alpha)}$, so hat man, wenn die abhängige Variable in der Differentialgleichung durch z bezeichnet wird, statt z einzusetzen

$$(x-a_1)^{r^{(1)}} \dots (x-a_{\varkappa-1})^{r^{(\varkappa-1)}} y,$$

die Differentialgleichung für y hat dann die vorhin angegebene Eigenschaft. Bei dem singulären Punkte im Endlichen $a_\varkappa$ sei auch ***der charakteristische Index gleich Null.*** Kommt nun in den Integralen bei diesem Punkte kein Logarithmus vor, so erhält man die Entwickelung der Integrale aus der ursprünglichen Differentialgleichung (vgl. Abh. Bd. 87 No. 7 II *a.*)). Sind die Coefficienten der Differentialgleichung rational, und es dürfen auch Logarithmen in den einzelnen Gruppen der Integrale bei $a_\varkappa$ vorkommen, so liefert die aus Abh. Bd. 87 No. 7 I entnommene Differentialgleichung $T_\varrho(y, x) = 0$, die in No. 3 III betrachtet ist, die Entwickelung der Functionen φ in jeder Gruppe.

5.

Von der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ (1.) in No. 1, in welcher $F_m(y, x)$ sich durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellen lässt, war in No. 1 vorausgesetzt worden, dass man $F_m(y, x)$ bei $x = a$ durch ein solches System von Differentialausdrücken der Form (4.) in No. 1 ausdrücken kann, welches in Bezug auf die Exponentengleichungen die dort vor *a.*) angegebene Eigenschaft besitzt, dass die Wurzeln der Exponenten-

gleichung von $\bar{F}_{\alpha_\gamma} = 0$ sich von denen der Exponentengleichung von $\bar{F}_{\alpha_\varkappa} = 0$, $\gamma \lesseqgtr \varkappa$, nicht um ganze Zahlen unterscheiden.

An Stelle dieser Voraussetzung über $F_m(y, x)$ wird jetzt eine solche aufgestellt, von welcher jene ein besonderer Fall war.

I. *a.*) Wenn der homogene lineare Differentialausdruck α^{ter} Ordnung $\Phi_\alpha(y, x)$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 auf die Form gebracht werden kann $e^w \bar{\Phi}_\alpha(e^{-w}y, x)$, wo w gleich Null oder von der Form $\sum\limits_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ ist, $\bar{\Phi}_\alpha$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten, so dass $\bar{\Phi}_\alpha = 0$ bei $x = a$ den charakteristischen Index gleich Null hat, so ist dieses nur auf *eine* Weise möglich. Die Ordnung von $\bar{\Phi}$ muss die α^{te} sein. Und wenn der Coefficient von $\dfrac{d^{\alpha-1}y}{dx^{\alpha-1}}$ in Φ_α durch q_1, in $\bar{\Phi}_\alpha$ durch $\bar{q}_1$ bezeichnet wird, so ist $-\alpha\dfrac{dw}{dx} + \bar{q}_1 = q_1$, also enthält $q_1 - \bar{q}_1$ die Glieder der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function q_1, die für $x = a$ in höherer als erster Ordnung unendlich werden. Daher ist w durch die Gleichung $-\alpha w = \int(q_1 - \bar{q}_1)\,dx$ und die Bedingung, dass das absolute Glied in w gleich Null sein soll, eindeutig bestimmt, und dann erhält man $\bar{\Phi}_\alpha$ aus der Gleichung

$$e^{-w}\Phi_\alpha(e^w y, x) = \bar{\Phi}_\alpha.$$

Ebenso wenn $\Phi_\alpha(y, x)$ auf die Form $e^w\bar{\Phi}_\alpha(e^{-w}y, x)$ gebracht werden kann, wo $w = 0$ oder von der Form $\sum\limits_1^n c_a x^a$ ist, in $\bar{\Phi}_\alpha = 0$ nach Substitution von $x = t^{-1}$ der charakteristische Index bei $t = 0$ gleich Null ist, so ist dieses nur auf *eine* Weise möglich. Denn wird

$$\Phi_\alpha(y, t^{-1}) = (-t^2)^\alpha \Phi'_\alpha(y, t) \quad \text{und} \quad \bar{\Phi}_\alpha(y, t^{-1}) = (-t^2)^\alpha \bar{\Phi}'_\alpha(y, t),\ \sum_1^n c_a t^{-a} = w'$$

bezüglich $w' = 0$ gesetzt, so erhält man $\Phi'_\alpha(y, t) = e^{w'}\bar{\Phi}'_\alpha(e^{-w'}y, t)$, und diese Darstellung ist nach dem Vorhergehenden nur auf eine Weise möglich. Ein solcher Differentialausdruck $\Phi_\alpha(y, x) = e^w\bar{\Phi}_\alpha(e^{-w}y, x)$ heisse ein ***bei dem Punkte $x = a$, bezüglich $x = \infty$ normaler Differentialausdruck,*** e^w heisse ***der zu diesem Punkte gehörende determinirende Factor, $\bar{\Phi}_\alpha$ der bei diesem Punkte reguläre Differentialausdruck in Φ_α.*** Ein normaler Differentialausdruck No. 1 (3.) ist ein bei jedem Punkte normaler und umgekehrt. Ein System von Differentialausdrücken, die bei demselben Punkte normal sind mit über-

einstimmendem determinirenden Factor, bildet einen bei diesem Punkte normalen Differentialausdruck mit demselben determinirenden Factor. Ist dieses System durch ein solches von zwei Bestandtheilen dargestellt, so hat die Exponentengleichung, die zu dem bei diesem Punkte regulären Differentialausdrucke in dem Gesammtausdrucke gehört, zu Wurzeln die Wurzeln der Exponentengleichung, die zu dem bei diesem Punkte regulären Differentialausdrucke in dem ersten Bestandtheile gehört, und die Wurzeln der Exponentengleichung, die bei dem entsprechenden Differentialausdrucke in dem zweiten Bestandtheile vorkommt, nachdem zu letzteren Wurzeln eine ganze Zahl addirt ist (vgl. No. 8 I.). Wenn ein bei einem Punkte normaler Differentialausdruck Φ_α durch ein System homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten und den Coefficienten der höchsten Ableitungen gleich 1 dargestellt wird, so müssen alle bei diesem Punkte normal sein mit demselben determinirenden Factor bei diesem Punkte. Denn wenn der in Φ_α enthaltene determinirende Factor e^w und der bei diesem Punkte reguläre Differentialausdruck $\overline{\Phi}_\alpha$ ist, so ergiebt sich aus $e^{-w}\,\Phi_\alpha(e^w y, x)$ für $\overline{\Phi}_\alpha$ ein System von Differentialausdrücken, die bei diesem Punkte regulär sein müssen. Daher muss in dem Systeme für Φ_α jeder Bestandtheil bei diesem Punkte normal sein mit dem determinirenden Factor e^w (vgl. Abh. Bd. 83 No. 3 II). In der Exponentengleichung von $\overline{\Phi}_\alpha = 0$ bei dem Punkte $x = a$, bezüglich $x = \infty$ ($x = t^{-1}$, $t = 0$), bei welchem Φ_α normal ist, mögen eine oder mehrere Wurzeln vorkommen, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, wo r jede Grösse vorstellt, die man erhält, wenn man zu einem bestimmten Werthe eine beliebige ganze Zahl addirt. Alsdann werde gesagt, der bei dem betrachteten Punkte normale Differentialausdruck ***enthalte bei diesem Punkte den Gruppenexponenten r.***

Es werde nun ein System bei einem Punkte normaler Differentialausdrücke gebildet

$$(1.)\qquad \varphi_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = y_1,\ \ \varphi_{\mathfrak{a}_1}(y_1, x) = y_2,\ \ldots\ \varphi_{\mathfrak{a}_\nu}(y_\nu, x),$$

wo $\varphi_{\mathfrak{a}_\varepsilon}$ von der Ordnung $\mathfrak{a}_\varepsilon$ ist. Diejenigen auf einander folgenden Bestandtheile dieses Systems, die bei diesem Punkte denselben determinirenden Factor haben, werden zu einem Differentialausdrucke zusammengezogen, wodurch das System hervorgehe

$$(2.)\qquad F_{\alpha_0}(y, x) = y_1',\ \ F_{\alpha_1}(y_1', x) = y_2',\ \ldots\ F_{\alpha_k}(y_k', x),$$

$$(3.)\qquad F_{\alpha_\varepsilon}(y_\varepsilon, x) = e^{w_\varepsilon}\overline{F}_{\alpha_\varepsilon}(e^{-w_\varepsilon} y_\varepsilon, x),$$

wo e^{w_c} der determinirende Factor bei diesem Punkte, $\overline{F}_{a_c}(y, x)$ der bei diesem Punkte reguläre Differentialausdruck ist und zwei auf einander folgende w_c von einander verschieden sind. Der letzte Bestandtheil F_{a_k} soll bei diesem Punkte einen Gruppenexponenten r enthalten, welcher in keinem der vorhergehenden Bestandtheile F_{a_c} $(c < k)$ bei diesem Punkte vorkommt. Es sollen also in der Exponentengleichung von $\overline{F}_{a_k} = 0$ bei diesem Punkte *eine oder mehrere* Wurzeln vorkommen, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, und keine solche Wurzeln in der Exponentengleichung von $\overline{F}_{a_c} = 0$ $(c < k)$ sich finden, während über die Wurzeln dieser Exponentengleichungen sonst weiter nichts vorausgesetzt wird. Dann werde gesagt, das System bei einem Punkte normaler Differentialausdrücke (1.) enthalte bei diesem Punkte den *Gruppenexponenten r ein*stellig. Der in diesem Falle in F_{a_k} enthaltene determinirende Factor e^{w_k} werde der *zu dem Gruppenexponenten r gehörende* determinirende Factor genannt.

Das System (4.) der No. 1 mit der dort vor $a.$) in Bezug auf die Wurzeln der Exponentengleichungen gemachten Voraussetzung ist ein solches, dass, wenn man dasselbe bei einem beliebigen Bestandtheile abbricht, man ein System bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke erhält, welches die Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig enthält.

Das System (1.) stelle den Differentialausdruck l^{ter} Ordnung $F_l(y, x)$ dar. Nun kann man mittels dieses Systemes, welches bei einem Punkte $x = a$ oder $x = \infty$ den Gruppenexponenten r einstellig enthalten soll, die Integrale von $F_l = 0$, in deren Entwickelung von der allgemeinen Form No. 1 (21.) die Exponenten von $x - a$, bezüglich $\frac{1}{x}$, sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, — solche Integrale mögen Integrale bei $x = a$, bezüglich $x = \infty$ *mit dem Gruppenexponenten r* genannt werden —, nach dem in den Nummern 1, 2 und 3 enthaltenen Verfahren darstellen.

Denn man stellt diese Integrale bei $x = a$ unter der Form auf

$$(4.) \qquad \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \dots \mu_s \int \mu_s^{-1} e^{w}\, \overline{Y}\, dx,$$

wo $\overline{Y}$ die bei $x = a$ genommene Entwickelung von der Form eines regulären Integrales mit dem Gruppenexponenten r ist, μ_1 bis μ_s die Form

$$e^{w} (x-a)^{\varrho} \sum_0^{\infty} c_a (x-a)^a$$

haben, w gleich Null oder von der Form $\sum_1^{n} c_{-a} (x-a)^{-a}$ ist, der Exponent

ϱ sich von r nicht um eine ganze Zahl unterscheidet. Dieses hat zur Folge, dass bei den successiven Integrationen in (4.), bei denen das constante Glied in den Entwickelungen annullirt wird, in dem jedesmal zu integrirenden Ausdruck die Exponenten von $x-a$ *nicht ganzzahlig* sind. Zu dem Zwecke werden die Integrale der Differentialgleichungen $\bar{F}_{\alpha_c}=0$ $(c \leqq k)$ bei $x=a$ unter der Form No. 1 (7.) (8.), die Integrale von $F_{\alpha_c}=0$ $(c \leqq k)$ unter der Form No. 1 (9.) (10.) aufgestellt, die Integrale von $F_l=0$ sind dann unter der Form No. 1 (11.) (12.) enthalten. In der Exponentengleichung von $\bar{F}_{\alpha_k}=0$ bei $x=a$ mögen λ' Wurzeln vorkommen, die sich von dem Gruppenexponenten r nur um ganze Zahlen unterscheiden, dieselben können an die Spitze des Systemes der Wurzeln No. 1 (6.) dieser Exponentengleichung gestellt werden. Nun werden die zugehörigen λ' Integrale von $\bar{F}_{\alpha_k}=0$ aus No. 1 (7.) (8.) entwickelt unter der Form No. 1 (19.), und es ergeben sich unter der Form No. 1 (20.), die die vorhin angegebene Beschaffenheit des Integrales (4.) hat, die λ' Integrale von $F_l=0$ mit dem Gruppenexponenten r bei $x=a$. Um die in Rede stehenden Integrale bei $x=\infty$ zu entwickeln, leitet man durch die Substitution $x=t^{-1}$, wenn

$$(5.)\quad \left\{\begin{array}{l} F_l(y,t^{-1})=(-t^2)^l F_l'(y,t),\quad \varphi_{\alpha_c}(y,t^{-1})=(-t^2)^{\alpha_c}\varphi'_{\alpha_c}(y,t) \\ \qquad t^{-2(\alpha_0+\cdots+\alpha_{c-1})}\varphi'_{\alpha_c}(t^{2(\alpha_0+\cdots+\alpha_{c-1})}y,t)=\varphi''_{\alpha_c}(y,t) \end{array}\right.$$

gesetzt wird, aus (1.) für $F_l'(y,t)$ das System her

$$(6.)\qquad \varphi'_{\alpha_0}(y,t)=y_1',\ \varphi''_{\alpha_1}(y_1',t)=y_2',\ldots \varphi''_{\alpha_\nu}(y_\nu',t),$$

(Abh. Bd. 83 No. 9 (12.), vgl. diese Abh. No. 8 I). Wenn in $\varphi_{\alpha_c}(y,x)$ der determinirende Factor bei $x=\infty$ gleich $e^{w(x)}$, der bei $x=\infty$ reguläre Differentialausdruck $\bar{\varphi}_{\alpha_c}(y,x)$ ist, und $\bar{\varphi}_{\alpha_c}(y,t^{-1})=(-t^2)^{\alpha_c-1}\bar{\varphi}'_{\alpha_c}(y,t)$, so ist $\varphi'_{\alpha_c}(y,t)$ bei $t=0$ normal mit dem determinirenden Factor $e^{w(t^{-1})}$ und dem bei $t=0$ regulären Differentialausdruck $\bar{\varphi}'_{\alpha_c}(y,t)$. Wird daher

$$\varphi''_{\alpha_c}(y,t)=e^{w(t^{-1})}\bar{\varphi}''_{\alpha_c}(e^{-w(t^{-1})}y,t)$$

gesetzt, so ist $\bar{\varphi}''_{\alpha_c}$ bei $t=0$ regulär. Die Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{\varphi}''_{\alpha_c}$ bei $t=0$ sind die der Exponentengleichung von $\bar{\varphi}'_{\alpha_c}=0$, nachdem eine ganze Zahl $-2(\alpha_0+\cdots+\alpha_{c-1})$ zu ihnen addirt ist. Das System (6.) enthält also den Gruppenexponenten r einstellig mit dem determinirenden Factor $e^{w(t^{-1})}$ aus φ'_{α_ν}, und die Exponentengleichungen von $\bar{\varphi}'_{\alpha_c}(y,t)=0$ bei

$t = 0$ enthalten ebensoviele Wurzeln, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, wie die Exponentengleichungen von $\bar{\varphi}''_{\mathfrak{a}_\mathfrak{c}}(y, t) = 0$. Die Entwickelung der Integrale von $F'_l(y, t) = 0$ bei $t = 0$, mit dem Gruppenexponenten r, findet nun vermittelst des Systemes (6.) wie bei (1.) durch die Formel (4.) statt.

Weil nun bei dem Integralausdrucke (4.) in dem jedesmal zu integrirenden Ausdrucke die Exponenten von $x-a$ nicht ganzzahlig sind, so ist das in den Nummern 1, 2 und 3 auseinandergesetzte Verfahren zur Untersuchung eines solchen Integralausdruckes unverändert anwendbar. Es bleibt demnach unverändert das Verfahren zur Ermittelung der Constanten in der linearen Verbindung der Integrale von $F_l(y, x) = 0$ mit dem Gruppenexponenten r, in welche Verbindung ein solches Integral bei dem Umgange um $x = a$ übergeht (No. 1 (25.)), und daher das Verfahren zur Ermittelung der Constanten in den linearen Relationen zwischen den Functionen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{\mathfrak{ab}}(x)$ (No. 1 (21.) und Schluss von *a.*)). Es bleibt ungeändert die Darstellung dieser Functionen $(x-a)^{r_\mathfrak{a}+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{\mathfrak{ab}}(x)$ durch die Integrale U (No. 1 *b.*)), die Darstellung der Grössen μ vermittelst $e^{w_\mathfrak{c}}$ und der Integrale von $\bar{F}_{\alpha_\mathfrak{c}} = 0$ ($\mathfrak{c} < k$) (No. 1 *c.*)) und die Darstellung der Integrale U durch bestimmte Integrale (No. 1 *d.*)). Auch bleibt die Recursionsformel für die Coefficienten in der Entwickelung der Functionen $e^{-w_k}(x-a)^{r_\mathfrak{a}+\alpha_0+\dots+\alpha_{k-1}}\varphi_{\mathfrak{ab}}(x)$ nach Potenzen von $x-a$ (No. 1 *e.*)) und die Darstellung dieser Coefficienten (No. 2). Es bleibt ferner die in No. 3 auseinandergesetzte Methode anwendbar, die Functionen $\varphi_{\mathfrak{ab}}(x)$ und ihre Ableitungen mit beliebig vorgeschriebener Annäherung durch ganze rationale Functionen von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ in einem Kreisringe um $x = a$ auszudrücken, und es bleiben die übrigen in No. 3 in Bezug auf die Werthberechnung der Integrale erhaltenen Resultate bestehen.

b.) Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ in der Differentialgleichung (1.) der No. 1, der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, hat bei jedem singulären Punkte $x = a$ von $F_m = 0$ eine Darstellung, wie in No. 1 (4.). Aus dieser ergeben sich nach No. 1 (20.) bis auf ganze Zahlen die Exponenten von $x-a$ in jeder Gruppe von Integralen, in deren Entwickelungen diese Exponenten sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, und die Anzahl der linearunabhängigen Integrale dieser Gruppe. Ebenso bei $x = \infty$ vermittelst der Substitution $x = t^{-1}$, vgl. (5.).

Es seien nun in $F_m(y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $F_l(y, x) = 0$ enthalten, wo $F_l(y, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 ist. Dann muss nach Abh. Bd. 83 No. 7 III. (siehe die vorliegende No. bei II.) derselbe durch ein System normaler Differentialausdrücke (mit einem oder mehreren Bestandtheilen) darstellbar sein. Ist $F_l(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, welches bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ den *Gruppenexponenten* r *einstellig enthält*, und gehen, wenn das System in die Form (2.) übergeführt ist, aus der Exponentengleichung von $\bar{F}_{a_k} = 0$ λ' Wurzeln hervor, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, so liefert $F_l = 0$ λ' Integrale mit dem Gruppenexponenten r von $F_m = 0$ bei dem singulären Punkt, von welchen Integralen man nach a.) die linearen Relationen beim Umgange um den singulären Punkt, die Darstellung und Werthberechnung angeben kann. ***Es ist also zuzusehen, ob aus solchen Differentialgleichungen $F_l = 0$ im Ganzen so viele linearunabhängige Integrale, als jeder Gruppe zukommen, erhalten werden.***

Ergiebt sich nun bei jedem singulären Punkt von $F_m = 0$ ein System von m linearunabhängigen Integralen der bezeichneten Art, so ist das Verfahren, die Fortsetzung eines Integrales von $F_m = 0$ von einem Punkte zu irgend einem anderen zu verfolgen, das in No. 4 angegebene; die Constanten in den dort vorkommenden Substitutionen B sind bereits bekannt nach a.), und die Constanten in den dort gebrauchten Substitutionen A werden ebenso, wie dort angegeben ist, ermittelt. Man hat hierbei von den bei jedem singulären Punkte entwickelten Integralen die Differentialdeterminante D in einem nichtsingulären Punkte zu berechnen, und zwar gemäss No. 4 (5.), (6.) einen Werth $\geqq \operatorname{Mod} D$ anzugeben (nach No. 3 IV d.)), ferner einen Werth $\leqq \operatorname{Mod} D$. Was letzteren Werth angeht, der in No. 4 aus No. 1 (16.) entnommen wurde, so ist hier, dadurch dass die Integrale in No. 1 (13.) eingesetzt werden, wenn $D = D' + D''$ gesetzt ist, ein solcher Werth von D' nach No. 3 IV d.) zu ermitteln, dass $\operatorname{Mod} D' - \operatorname{Mod} D'' > 0$ wird. Zu dem Zwecke ist $\operatorname{Mod} D''$ successive zu verkleinern, oder $\operatorname{Mod} D$ zu vergrössern durch Multiplication der Integrale mit Factoren, deren Moduln grösser als 1 sind. ***Wenn aber $F_m = 0$ in mehrere Differentialgleichungen zerfällt, von denen jede die Beschaffenheit, wie die in No. 1 bis 4 betrachtete hat*** (vgl. No. 9 I und II), ***so werden die Integrale dieser Differentialgleichungen bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ als m Integrale***

letzterer genommen. Ein Integral von $F_m = 0$ wird bei einem (singulären oder nichtsingulären) Punkte von $F_m = 0$, bei dem der charakteristische Index gleich Null ist, durch Integrale dieser einzelnen Differentialgleichungen ausgedrückt. Dann kommt man darauf zurück, diese letzteren zu behandeln nach No. 1 bis 4 (vgl. No. 4 III *b.*)).

II. *a.*) Es seien $F^{(1)}(y,x)$, $F^{(2)}(y,x)$ bis $F^{(s)}(y,x)$ s Systeme von normalen Differentialausdrücken, die bei demselben Punkte den Gruppenexponenten r einstellig enthalten.

Diese Systeme sollen bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r mit einem und demselben zugehörigen determinirenden Factor enthalten, und es sollen nun die linearunabhängigen Integrale von $F^{(c)}(y,x) = 0$ $(\mathfrak{c} = 1 \ldots s)$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt werden. Das System $F^{(c)}(y,x)$ habe die Darstellung

$$(7.) \qquad \Phi^{(c)}(y,x) = y_1, \quad \Psi^{(c)}(y_1,x),$$

wo $\Psi^{(c)}$ das System derjenigen auf einander folgenden Bestandtheile des Systemes $F^{(c)}$ ist, von denen der erste zuerst in dem Systeme $F^{(c)}$ bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r enthält. Um nun die linearunabhängigen Integrale von $F^{(c)}(y,x) = 0$ $(\mathfrak{c} = 1 \ldots s)$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung zu vereinigen, ist nach Abh. Bd. 83 No. 2 I. und II. (vgl. die vorliegende Abh. No. 7 I.) zu verfahren.

Es werden zunächst die linearunabhängigen Integrale von $\Phi^{(c)}(y,x) = 0$ $(\mathfrak{c} = 1 \ldots s)$ in einer Differentialgleichung vereinigt. Zuerst findet dieses in Bezug auf $\Phi^{(1)} = 0$ und $\Phi^{(2)} = 0$ statt; $\Phi^{(1)}$ sei von der Ordnung $\mathfrak{a}_1$, $\Phi^{(1)}_{\mathfrak{a}_1}$, $\Phi^{(2)}$ von der Ordnung $\mathfrak{a}_2$, $\Phi^{(2)}_{\mathfrak{a}_2}$. Wenn die Differentialgleichungen $\Phi^{(1)}_{\mathfrak{a}_1} = 0$ und $\Phi^{(2)}_{\mathfrak{a}_2} = 0$ l linearunabhängige Integrale und nicht mehr gemeinsam haben, so erfüllen diese eine homogene lineare Differentialgleichung l^{ter} Ordnung $\chi_l(y,x)$ mit rationalen Coefficienten, von denen der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist; ist $l = 0$, so wird $\chi_l = y$. Dann erhalten $\Phi^{(1)}_{\mathfrak{a}_1}$ und $\Phi^{(2)}_{\mathfrak{a}_2}$ die Darstellungen

$$(8.) \qquad \chi_l(y,x) = y_1, \quad \varphi^{(1)}_{\mathfrak{a}_1 - l}(y_1,x)$$

$$(9.) \qquad \chi_l(y,x) = y_1, \quad \varphi^{(2)}_{\mathfrak{a}_2 - l}(y_1,x).$$

Werden nun die Integrale von $\varphi^{(1)}_{\mathfrak{a}_1 - l} = 0$ und $\varphi^{(2)}_{\mathfrak{a}_2 - l} = 0$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt, deren Coefficienten rational sein müssen und in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1

gesetzt ist. $\theta_{a_1+a_2-2}=0$. so ist die Differentialgleichung. welche die linear-unabhängigen Integrale von $\Phi_{a_1}^{(1)}=0$ und $\Phi_{a_2}^{(2)}=0$ enthält, wenn

$$(10.)\qquad \chi_l(y,x)=y_1.\quad \theta_{a_1+a_2-2l}(y_1,x)=\chi_{a_1+a_2-l}(y,x)$$

gesetzt wird, $\chi_{a_1+a_2-l}(y,x)=0$.

In einem System normaler Differentialausdrücke seien die einzelnen Bestandtheile selbst durch Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke dargestellt. Der durch dieses System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke gegebene Differentialausdruck sei durch irgend ein anderes System unzerlegbarer linearer Differentialausdrücke dargestellt, so müssen letztere Ausdrücke normal sein, und es müssen die Bestandtheile des einen Systems mit denen des anderen sich so paaren lassen, dass die Ausdrücke in demselben Paare einander ähnlich sind nach Abh. Bd. 83 No. 7 III (vgl. die vorliegende Abh. No. 6). Daher ist $\chi_l(y,x)$ durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellbar, von denen keiner bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r enthält, ebenso $\varphi_{a_1-l}^{(1)}$ und $\varphi_{a_2-l}^{(2)}$. Dem Differentialausdruck $\theta_{a_1+a_2-2l}(y,x)$ kann man die Darstellung

$$(11.)\qquad \varphi_{a_1-l}^{(1)}(y,x) = y_1,\quad \xi_{a_2-l}(y_1,x)$$

geben, wo ξ_{a_2-l} durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, welches ähnlich ist einem solchen Systeme für $\varphi_{a_2-l}^{(2)}$ (Abh. Bd. 83 No. 7 IV, vgl. diese Abh. No. 6 II *a*.). Also wird $\chi_{a_1+a_2-l}(y,x)$ durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke dargestellt, von denen keiner bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r enthält.

Die linearunabhängigen Integrale von $\chi_{a_1+a_2-l}(y,x)=0$ und $\Phi^{(3)}=0$ werden in derselben Weise in einer Differentialgleichung vereinigt, und in gleicher Weise ist fortzufahren, bis man die homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $G_n(y,x)=0$ erhält, in welcher die linearunabhängigen Integrale von $\Phi^{(\mathfrak{c})}=0$ $(\mathfrak{c}=1\dots s)$ vereinigt sind. Hier ist also $G_n(y,x)$ durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellbar, von denen keiner bei dem betrachteten Punkt den Gruppenexponenten r enthält.

Nun wird $G_n(y,x)$ auf die Form

$$(12.)\qquad \Phi_{a_{\mathfrak{c}}}^{(\mathfrak{c})}(y,x) = y_1,\quad g_{n-a_{\mathfrak{c}}}(y_1,x)$$

gebracht. Dann werden die linearunabhängigen Integrale von $g_{n-a_{\mathfrak{c}}}=0$ und $\Psi^{(\mathfrak{c})}=0$ in einer Differentialgleichung vereinigt. $\Psi^{(\mathfrak{c})}$ sei von der

Ordnung $\mathfrak{b}_c$; die λ gemeinschaftlichen Integrale von $g_{n-a_c}=0$ und $\Psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c}=0$ erfüllen die Differentialgleichung $\eta_\lambda(y, x)=0$ mit rationalen Coefficienten, von denen der der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist; wenn $\lambda=0$, so ist $\eta_\lambda=y$. Dann haben g_{n-a_c} und $\Psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c}$ die Darstellungen

$$(13.)\qquad \eta_\lambda(y, x) \;=\; y_1,\quad \gamma_{n-a_c-\lambda}(y_1, x),$$

$$(14.)\qquad \eta_\lambda(y, x) \;=\; y_1,\quad \psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c-\lambda}(y_1, x).$$

Nun sind die Integrale von $\gamma_{n-a_c-\lambda}=0$ und $\psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c-\lambda}=0$ in einer Differentialgleichung zu vereinigen, welcher man die Form

$$(15.)\qquad \gamma_{n-a_c-\lambda}(y, x)=y_1,\quad \zeta^{(c)}_{\mathfrak{b}_c-\lambda}(y_1, x)=0$$

geben kann. Wenn nun η_λ durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke dargestellt ist, so enthält kein Bestandtheil bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r. Und wenn $\Psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c}$ durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke dargestellt ist, und ebenso $\psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c-\lambda}$, so müssen die Bestandtheile in letzterem Systeme bei dem betrachteten Punkte alle denselben determinirenden Factor wie in $\Psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c}$ haben, und die Bestandtheile, welche r bei diesem Punkte enthalten, sich mit den von derselben Beschaffenheit in $\Psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c}$ so paaren lassen, dass die in einem Paare enthaltenen ähnlich sind (Abh. Bd. 83 No. 7 III.). $\zeta^{(c)}_{\mathfrak{b}_c-\lambda}$ wird aber durch ein System dargestellt, welches ähnlich ist dem Systeme für $\psi^{(c)}_{\mathfrak{b}_c-\lambda}$.

Also sind die linearunabhängigen Integrale von $G_n=0$ und $F^{(c)}=0$ in der Differentialgleichung

$$(16.)\qquad G_n(y, x)=y_1,\quad \zeta^{(c)}(y_1, x)=0$$

vereinigt, wo $\zeta^{(c)}$ durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke dargestellt wird, welche bei dem betrachteten Punkte denselben determinirenden Factor wie $\Psi^{(c)}$ enthalten, und in welchem System die Bestandtheile, die den Gruppenexponenten r enthalten, sich mit denen von derselben Beschaffenheit in $\Psi^{(c)}$ so paaren lassen, dass die in einem Paare stehenden Differentialausdrücke ähnlich sind.

Jetzt sind noch die linearunabhängigen Integrale von $\zeta^{(c)}=0$ $(c=1\dots s)$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung $H_\nu=0$ zu vereinigen. Dieses geschieht successive wie bei (8.) und (9.). Der Differentialausdruck H_ν ist daher durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, die bei dem betrachteten Punkte alle denselben determinirenden Factor wie

in $\Psi^{(c)}$ haben, und unter denen welche vorkommen, die bei diesem Punkte den Gruppenexponenten r enthalten.

Die Differentialgleichung, in welcher die linearunabhängigen Integrale von $F^{(c)} = 0$ $(c = 1 \ldots s)$ vereinigt sind, ist also

$$(17.) \qquad G_n(y, x) = y_1, \; H_\nu(y_1, x) = 0.$$

Der Differentialausdruck in (17.) *ist durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, welches bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r einstellig enthält mit dem zugehörigen determinirenden Factor aus den Systemen* $F^{(c)}$ $(c = 1 \ldots s)$. Die Integrale aus (17.) bei dem betreffenden Punkte werden nach No. 1 (11.) und (21.) entwickelt (vgl. diese No. I (4.)). Dann gehen aus (17.) so viele linearunabhängige Integrale mit dem Gruppenexponenten r bei diesem Punkte hervor, wie solche Integrale aus den $F^{(c)} = 0$ $(c = 1 \ldots s)$ sich ergeben, und die einen lassen sich durch die anderen ausdrücken. Denn wenn man zwei Systeme linearunabhängiger Integrale von (17.) mit Entwickelungen der Form No. 1 (21.) hat $\left(\text{wo bei } x = \infty \; \frac{1}{x} \text{ statt } x-a\right.$ $\left.\text{steht}\right)$, so muss einer Gruppe von denjenigen Integralen in dem einen Systeme, bei welchen die Exponenten von $x-a$ bezüglich $\frac{1}{x}$ sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, eine Gruppe solcher Integrale in dem anderen Systeme, bei denen die Exponenten sich von jenen nur um ganze Zahlen unterscheiden, entsprechen, und es müssen die Integrale der Gruppe des einen Systems sich durch die der entsprechenden Gruppe des anderen Systemes ausdrücken lassen, daher muss die Anzahl der Integrale in beiden Gruppen dieselbe sein. (Abh. Bd. 74 No. 1 (5.)).

Ferner sollen die Systeme normaler Differentialausdrücke $F^{(c)}$ $(c = 1 \ldots s)$ den Gruppenexponenten r bei einem und demselben Punkte einstellig, aber alle *mit verschiedenen zugehörigen determinirenden Factoren* enthalten. Dann sind die aus den verschiedenen Differentialgleichungen $F^{(c)} = 0$ $(c = 1 \ldots s)$ bei diesem Punkte hervorgehenden Integrale mit dem Gruppenexponenten *r unter einander linearunabhängig.*

Denn, wenn $F^{(c)}$ $(c = 1 \ldots s)$ wieder die Darstellung (7.) hat, und die Differentialgleichung (16.) hergeleitet ist, so liefern die linearunabhängigen Integrale der genannten Art aus $F^{(c)} = 0$ in $G_n(y, x) = y_1$ eingesetzt, eben so viele linearunabhängige Integrale von $\zeta^{(c)}(y, x) = 0$. Nun sind die Integrale von $\zeta^{(c)} = 0$ $(c = 1 \ldots s)$ unter einander linearunabhängig. (Abh. Bd. 83 No. 7 IV *c.*) oder No. 3 (11.)). Daher müssen die bezeichneten Integrale

aus den verschiedenen Differentialgleichungen $F^{(\mathfrak{c})} = 0\,(\mathfrak{c} = 1 \dots s)$ unter einander linearunabhängig sein.

b.) In der Differentialgleichung $F_m = 0$ No. 1 (1.), in welcher F_m durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt ist, seien nun die Integrale einer oder mehrerer Differentialgleichungen $F^{(\mathfrak{c})} = 0\,(\mathfrak{c} = 1 \dots s)$ enthalten, in welchen die Differentialausdrücke $F^{(\mathfrak{c})}$ durch Systeme normaler Differentialausdrücke gegeben sind, die bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ den Gruppenexponenten r einstellig enthalten.

Die zugehörigen determinirenden Factoren bei diesem Punkte seien in den Systemen $F^{(\mathfrak{c})}\,(\mathfrak{c} = 1 \dots s)$ *übereinstimmend.* Dann giebt es nach *a.*) eine homogene lineare Differentialgleichung, in welcher die Integrale von $F^{(\mathfrak{c})} = 0$ $(\mathfrak{c} = 1 \dots s)$ vereinigt sind, und deren Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, welches bei demselben Punkte den Gruppenexponenten r einstellig mit dem zugehörigen determinirenden Factor aus $F^{(\mathfrak{c})}$ enthält.

Dieses System werde an die Spitze einer Darstellung von F_m, die durch ein System normaler Differentialausdrücke gegeben wird, gestellt, die einzelnen Bestandtheile dieses Systemes seien in unzerlegbare Differentialausdrücke aufgelöst, dasselbe sei in Bezug auf das ursprüngliche System für F_m geschehen. Dann ergiebt sich, weil die Bestandtheile des einen Systemes sich mit denen des anderen so paaren lassen, dass die in einem Paare stehenden ähnlich sind, dass die Differentialgleichungen $F^{(\mathfrak{c})} = 0$ $(\mathfrak{c} = 1 \dots s)$ *nicht mehr* linearunabhängige Integrale mit dem Gruppenexponenten r bei diesem Punkte liefern können, als in denjenigen Bestandtheilen des ursprünglichen Systems von F_m, die bei dem betrachteten Punkte *denselben zugehörigen determinirenden Factor wie* $F^{(\mathfrak{c})}$ haben, die Exponentengleichungen der zugehörigen regulären Differentialausdrücke bei diesem Punkte Wurzeln, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, enthalten.

Bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ mögen die Systeme $F^{(\mathfrak{c})}$ den Gruppenexponenten r einstellig enthalten mit zugehörigen determinirenden Factoren, die bei den verschiedenen Systemen $F^{(\mathfrak{c})}\,(\mathfrak{c} = 1 \dots s)$ *von einander verschieden* sind. Dann liefern die Differentialgleichungen $F^{(\mathfrak{c})} = 0$ eben so viele linearunabhängige Integrale von $F_m = 0$ mit dem Gruppenexponenten r, als bei dem betrachteten Punkte in den Exponentengleichungen der regulären Differentialausdrücke, die zu den einzelnen Bestandtheilen der Systeme

$F^{(c)}$ $(c = 1 \dots s)$ gehören, Wurzeln vorhanden sind, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden.

III. Es ist nun weiter zu untersuchen, wie ein System normaler Differentialausdrücke, welches bei einem singulären Punkte von $F_m(y, x) = 0$ No. 1 (1.) den Gruppenexponenten r einstellig mit einem bestimmten zugehörigen determinirenden Factor enthält und, gleich Null gesetzt, Integrale ergiebt, die $F_m = 0$ erfüllen, aufzufinden ist. Ein System normaler Differentialausdrücke, welches $F_m(y, x)$ darstellt, möge bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ auf die Form

$$(18.) \qquad R(y, x) = y_1, \quad S(y_1, x) = y_2, \quad T(y_2, x)$$

gebracht sein, wo R ein System normaler Differentialausdrücke ist, die bei diesem Punkte den Gruppenexponenten r nicht enthalten, R sich auch auf y reduciren kann, S alle diejenigen normalen Differentialausdrücke umfasst, die bei diesem Punkte den Gruppenexponenten r mit einem bestimmten zugehörigen determinirenden Factor enthalten, ausserdem etwa noch andere Bestandtheile haben kann, T die übrigen Bestandtheile enthält, von denen also bei diesem Punkte entweder keiner den Gruppenexponenten r, oder keiner denselben mit dem in S vorkommenden zugehörigen determinirenden Factor enthält, T sich auch auf y_2 reduciren kann.

Wenn nun in $F_m(y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $F_l(y, x) = 0$ enthalten sind, wo $F_l(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke, die in unzerlegbare aufgelöst sind, darstellbar ist, welches bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r einstellig mit dem zugehörigen determinirenden Factor aus S enthält, so sind in $S(y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $\Sigma(y, x) = 0$ enthalten, wo $\Sigma(y, x)$ sich durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellen lässt, welches bei demselben Punkte den Gruppenexponenten r einstellig mit dem bestimmten determinirenden Factor enthält, und in welchem die Bestandtheile, die bei diesem Punkte r enthalten, sich mit denen in $F_l(y, x)$, die r enthalten, so paaren lassen, dass die Ausdrücke in demselben Paare ähnlich sind, nach einem Satze, der in No. 6 I bewiesen wird.

Giebt es mehrere Differentialgleichungen $F^{(c)}(y, x) = 0$ $(c = 1 \dots s)$ der bezeichneten Art, so dass in diesen Systemen $F^{(c)}$ die zu r gehörenden determinirenden Factoren übereinstimmen, so kann man nach II ihre Integrale in einer Differentialgleichung vereinigen, deren Differentialausdruck durch

ein System normaler Ausdrücke darstellbar ist, welches bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r einstellig mit jenem bestimmten determinirenden Factor enthält. Es muss dann also auch eine Differentialgleichung $\Sigma(y,x)=0$ aus $S=0$ hervorgehen, wo $\Sigma(y,x)$ sich durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellen lässt, das bei diesem Punkte den Gruppenexponenten r einstellig mit dem genannten determinirenden Factor enthält, und wo $\Sigma=0$ eben so viele linearunabhängige Integrale bei diesem Punkte mit dem Gruppenexponenten r ergiebt, wie die Differentialgleichungen $F^{(\iota)}(y,x)=0$. Dann sind in $F_m(y,x)=0$ die Integrale von

$$(19.)\qquad R(y,x)=y_1,\quad \Sigma(y_1,x)=0$$

enthalten, wo der Differentialausdruck in (19.) bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r einstellig mit dem genannten determinirenden Factor enthält und die Differentialgleichung (19.) eben so viele linearunabhängige Integrale mit dem Gruppenexponenten r von $F_m=0$ liefert, wie die Differentialgleichungen $F^{(\iota)}(y,x)=0$ $(\iota=1\dots s)$. *Es bleibt demnach übrig, aus der Differentialgleichung $S(y,x)=0$ die genannte Differentialgleichung $\Sigma(y,x)=0$ herzuleiten, in der $\Sigma(y,x)$ bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r einstellig mit dem bestimmten determinirenden Factor nethält.* Das hierzu dienende Verfahren wird in No. 9 entwickelt.

6.

In der vorigen Nummer ist der Begriff der *Aehnlichkeit zweier normalen Differentialausdrücke* angewandt worden, der in Abh. Bd. 83 No. 7 III dadurch definirt worden ist, dass sie unzerlegbar, von derselben Ordnung und demselben determinirenden Factor sind und dass die in ihnen enthaltenen regulären Differentialausdrücke gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, bei denen in jedem Punkte die Wurzeln der Exponentengleichung der einen sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung der anderen so paaren lassen, dass die Wurzeln in jedem Paare sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden. Diese ganzen Zahlen brauchen in den Paaren bei demselben Punkte nicht einander gleich zu sein [vgl. l. c. No. 7 II *a.*); ein allgemeineres Beispiel als das dort angegebene ist dieses: Wenn bei einem Punkte $x=a$ der charakteristische Index in den dort vorkommenden Differentialgleichungen $\Phi_m=0$ und $\Psi_n=0$ gleich Null ist, die Wurzeln der Exponentengleichung von $\Psi_n=0$ sich zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden, und

einzelne dieser Wurzeln, aber nicht alle, die Exponentengleichung von $\Phi_m = 0$ erfüllen]. Bei einem Punkte, der in beiden Differentialgleichungen nichtsingulär ist, stimmen die Wurzeln der Exponentengleichungen überein. Es kam ferner in der vorigen Nummer der Begriff der *Aehnlichkeit zweier Systeme normaler Differentialausdrücke* vor, der in Abh. Bd. 83 No. 7 IV dadurch definirt ist, dass die Systeme gleichviel Bestandtheile haben, und die Bestandtheile von derselben Stelle einander ähnlich sind.

I. Auf diesen Begriffen beruht folgender auf die verschiedenen Darstellungen eines durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbaren Differentialausdruckes sich beziehender Satz, der einen in Abh. Bd. 83 No. 10 I bewiesenen Satz als speciellen Fall enthält, und aus welchem ein in No. 5 III angewandter Satz hervorgeht.

a.) Es besteht folgender Hülfssatz. Φ_N sei ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke. In der Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ seien die Integrale einer Differentialgleichung $F_k = 0$ enthalten, wo F_k ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke ist. Dann kann man den durch Φ_N gegebenen Differentialausdruck mittels eines Systemes unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke darstellen, in welchem das System F_k an der Spitze steht, und auf dessen Bestandtheile ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke folgt, welches ähnlich ist dem System Φ_N, nachdem aus diesem System gewisse Bestandtheile, die mit den Bestandtheilen von F_k gepaart sind, so dass in demselben Paare ähnliche Bestandtheile sich finden, herausgenommen sind. Der Beweis dieses Satzes ist in dem Beweise des Satzes Abh. Bd. 83 No. 7 III *a.*) enthalten.

b.) Mittels dieses Hülfssatzes wird *folgender Satz* hergeleitet.

Man habe ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke $R(y, x)$, ein solches $S(y, x)$ und ein solches $T(y, x)$, wo R und T sich auch auf y reduciren können, und bilde den Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ mittels des Systemes

$$(1.) \quad R(y, x) = y_1, \quad S(y_1, x) = y_2, \quad T(y_2, x).$$

Wenn man nun eine andere Darstellung von Φ_N durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke hat, so lassen sich nach Abh. Bd. 83 No. 7 III *c.*) deren Bestandtheile mit denen des Systemes (1.) so paaren, dass die Ausdrücke in demselben Paare ähnlich sind. Es sei nun eine zweite solche Darstellung von Φ_N vorhanden. Dann giebt es auch eine solche Darstellung von Φ_N von der Form

$$(2.) \quad R(y, x) = y_1, \quad S'(y_1, x) = y_2, \quad T(y_2, x)$$

wo das System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke S', welches den Differentialausdruck S darstellt, *ähnlich ist dem System*, welches übrig bleibt, wenn aus der zweiten Darstellung von Φ_N gewisse Bestandtheile, die mit denen in R und T so gepaart sind, dass in demselben Paare ähnliche stehen, herausgenommen werden.

Aus der zweiten Darstellung von Φ_N wird nach dem Hülfssatze *a.*) eine solche hergeleitet von der Form

$$(3.) \quad R(y, x) = y_1, \quad U(y_1, x),$$

wo U durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke dargestellt ist, welches ähnlich ist dem zweiten System für Φ_N, nachdem aus diesem gewisse Bestandtheile, die mit denen aus R als ähnliche gepaart sind, herausgenommen worden sind. Der Differentialausdruck, der durch $S(y_1, x) = y_2$, $T(y_2, x)$ dargestellt wird, ist dann gleich $U(y_1, x)$. Wenn man nun zu einem Systeme normaler Differentialausdrücke das reciproke System nimmt, so erhält man den zu dem Differentialausdrucke, der durch das ursprüngliche System dargestellt wird, reciproken Differentialausdruck (Abh. Bd. 83 No. 7 V). Das zu einem Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke reciproke System besteht aus den zu den Bestandtheilen des ersteren reciproken in umgekehrter Reihenfolge. Die Bestandtheile des letzteren Systemes sind unzerlegbare normale Ausdrücke. Die zu zwei ähnlichen normalen Differentialausdrücken reciproken sind ähnliche normale Differentialausdrücke. Die reciproken Systeme zu S, T, U werden durch $\underline{S}$, $\underline{T}$, $\underline{U}$ bezeichnet. Dann wird der Differentialausdruck, der dem Systeme $\underline{U}(y, x)$ gleich ist, durch das System

$$(4.) \quad \underline{T}(y, x) = y_1, \quad \underline{S}(y_1, x)$$

dargestellt. Nun kann man wieder nach dem Hülfssatze *a.*) für den Differentialausdruck $\underline{U}(y, x)$ eine Darstellung herleiten von der Form

$$(5.) \quad \underline{T}(y, x) = y_1, \quad \underline{S}'(y_1, x),$$

wo $\underline{S}'$ durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke gegeben wird, welches ähnlich ist dem System $\underline{U}(y, x)$, nachdem aus letzterem Systeme gewisse mit den Bestandtheilen von $\underline{T}$ als ähnliche gepaarte Bestandtheile herausgenommen sind. Das zu (5.) reciproke System

$$(6.) \quad S'(y, x) = y_1, \quad T(y_1, x)$$

stellt nun den durch $U(y, x)$ gegebenen Differentialausdruck dar, und hier

ist das System S' ähnlich dem Systeme U, nachdem aus diesem System die Bestandtheile ausgeschieden sind, die denjenigen in $\underline{U}$ entsprechen, welche denen in $\underline{T}$ correspondiren. Aus der oben genannten zweiten Darstellung von Φ_N, aus welcher bereits die früher genannten mit den Bestandtheilen von R gepaarten Bestandtheile herausgenommen sind, werden nun von den übrigen Bestandtheilen diejenigen von derselben Stelle, wie die in dem Systeme U mit den Bestandtheilen von T gepaarten ausgeschieden, so bilden die übrigbleibenden ein System, welches ähnlich ist dem Systeme $S'(y, x)$, womit der Satz bewiesen ist.

Aus diesem Satze folgt nachstehender:

In dem Systeme $S(y_1, x)$ in (1.) sollen einzelne Bestandtheile vorkommen, A_1, A_2 bis A_n, $n \geqq 1$, von denen keiner einem anderen Bestandtheile in dem System (1.) ähnlich ist, unter einander dürfen welche ähnlich sein. In einer zweiten Darstellung von Φ_N durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke seien die den Ausdrücken A_1 bis A_n ähnlichen Bestandtheile durch A'_1 bis A'_n bezeichnet. Dann giebt es auch eine Darstellung von Φ_N von der Form (2.), wo das System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke S' *ähnlich ist dem System,* welches dadurch aus dem zweiten System hergeleitet wird, dass aus diesem gewisse mit den Bestandtheilen von R und T als ähnliche gepaarte Ausdrücke ausgeschieden werden und *also die Bestandtheile A'_1 bis A'_n in derselben Reihenfolge, wie in dem zweiten Systeme, stehen bleiben.*

Wenn der Differentialausdruck F_m (1.) in No. 1 durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke dargestellt ist, so haben die Bestandtheile, die bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ den Gruppenexponenten r mit einem und demselben zugehörigen determinirenden Factor enthalten (s. No. 5), die Eigenschaft der Ausdrücke A in dem vorigen Satze, wo Φ_N gleich F_m gesetzt wird; diese Bestandtheile sollen alle in dem Systeme S in (1.) vorkommen und in R kein Bestandtheil, der bei diesem Punkte r enthält. Die Differentialgleichung $F_m = 0$ enthalte nun die Integrale einer Differentialgleichung $F_t = 0$, wo F_t durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke gegeben wird, welches bei dem betrachteten singulären Punkte von $F_m = 0$ den Gruppenexponenten r einstellig mit demselben zugehörigen determinirenden Factor enthalten soll. Dann hat F_m die Darstellung $F_t(y, x) = y_1$, $f_{m-t}(y_1, x)$, wo f_{m-t} durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke sich darstellt. Diese Darstellung von F_m wird

als das zweite System für Φ_N in dem vorigen Satze genommen. Dann folgt aus der Darstellung des Differentialausdruckes S durch das System S' des vorigen Satzes, dass in der Differentialgleichung $S=0$ die Integrale einer Differentialgleichung $\Sigma=0$ enthalten sind, ***wo Σ durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke gegeben wird, welches bei dem betrachteten Punkte den Gruppenexponenten r einstellig mit dem bestimmten zugehörigen determinirenden Factor enthält und dessen Bestandtheile, die r enthalten, mit denen in F_l, die diesen Gruppenexponenten enthalten, in derselben Reihenfolge als ähnliche gepaart werden können.***

Dieses ist der in No. 5 III angewandte Satz.

II. Im Folgenden werden einige Sätze aus Abh. Bd. 83 No. 7, die von dem Begriff der Aehnlichkeit zweier normaler Differentialausdrücke oder zweier Systeme solcher Ausdrücke ausgehen, verallgemeinert.

a.) Verallgemeinerung des Satzes Abh. Bd. 83 No. 7 IV Gl. (15.).

$\Phi_m(y,x)=0$ und $\Psi_n(y,x)=0$ seien zwei homogene lineare Differentialgleichungen m^{ter} bezüglich n^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, deren Integrale von einander linearunabhängig sind. Ψ_n sei gleich einem Systeme normaler Differentialausdrücke, die in unzerlegbare aufgelöst sind. Die Integrale beider Differentialgleichungen werden vereinigt in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{m+n}(y,x)=0$, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt ist. Erhält $F_{m+n}(y,x)$ die Form

$$(7.)\qquad \Phi_m(y,x)=y_1,\quad \psi_n(y_1,x),$$

so ist $\psi_n(y_1,x)$ durch ein System normaler Ausdrücke darstellbar, welches dem Systeme $\Psi_n(y,x)$ ähnlich ist. (Abh. Bd. 83 No. 7 IV (14.)). F_{m+n} erhalte die Darstellung

$$(8.)\qquad \Psi_n(y,x)=y_1,\quad \varphi_m(y_1,x).$$

Wenn nun $\Phi_m=0$ die Integrale einer Differentialgleichung k^{ter} Ordnung $F_k=0$ enthält, in welcher F_k ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke ist, so enthält auch $\varphi_m=0$ die Integrale einer Differentialgleichung $f_k=0$, in welcher f_k durch ein dem Systeme F_k ähnliches System normaler Differentialausdrücke gegeben wird, und umgekehrt, enthält $\varphi_m=0$ die Integrale einer Differentialgleichung $f_k=0$, in welcher f_k ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke ist, so enthält $\Phi_m=0$ die Integrale von $F_k=0$, wo das System F_k *ähnlich* f_k ist.

Um den ersten Theil dieses Satzes zu beweisen, werden die Integrale von $\Psi_n = 0$ und $F_k = 0$ in einer Differentialgleichung vereinigt, die die Form erhält

$$(9.) \quad \Psi_n(y, x) = y_1, \quad f_k(y_1, x) = 0.$$

Dann wird f_k durch ein dem Systeme F_k ähnliches System gegeben nach (7.), und die Integrale von $f_k = 0$ erfüllen $\varphi_m = 0$.

Um den zweiten Theil des Satzes zu beweisen, werde φ_m durch

$$(10.) \quad f_k(y, x) = y_1, \quad \varphi_{m-k}(y_1, x)$$

dargestellt. Dann sei der erste Bestandtheil in dem Systeme unzerlegbarer normaler Bestandtheile f_k $\chi_{a_1}(y, x)$ und daher f_k durch

$$(11.) \quad \chi_{a_1}(y, x) = y_1, \quad f'_{k-a_1}(y_1, x)$$

dargestellt. Da nun in (9.) die Integrale von

$$(12.) \quad \Psi_n(y, x) = y_1, \quad \chi_{a_1}(y_1, x) = 0$$

enthalten sind, so folgt hieraus, dass in $\Phi_m = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung a_1^{ter} Ordnung $X_{a_1}(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 enthalten sind, welche Integrale die Differentialgleichung (12.) erfüllen (Abh. Bd. 83 No. 2 III). Dann muss X_{a_1} unzerlegbar sein, weil χ_{a_1} unzerlegbar ist. X_{a_1} muss normal sein, weil die Integrale von $X_{a_1} = 0$ in der Differentialgleichung (12.) enthalten sind, und das System in (12.) aus normalen Differentialausdrücken besteht (Abh. Bd. 83 No. 7 III *b.*). X_{a_1} muss ähnlich χ_{a_1} sein (Abh. Bd. 83 No. 7 II *a.*)). Man kann der Differentialgleichung (12.) die Form geben

$$(13.) \quad X_{a_1}(y, x) = y_1, \quad \Psi'_n(y_1, x) = 0,$$

wo Ψ'_n ein dem Systeme Ψ_n ähnliches System ist (7.).

Nun wird Φ_m auf die Form gebracht

$$(14.) \quad X_{a_1}(y, x) = y_1, \quad \Phi'_{m-a_1}(y_1, x).$$

Dann sind die Integrale der Differentialgleichungen $\Phi'_{m-a_1} = 0$ und $\Psi'_n = 0$ von einander linearunabhängig, weil sie erhalten werden, wenn man die $m - a_1$ Integrale von $\Phi_m = 0$, die von den Integralen von $X_{a_1} = 0$ linearunabhängig sind, und die Integrale von $\Psi_n = 0$ in $X_{a_1}(y, x)$ einsetzt. Und diese Integrale sind vereinigt in der Differentialgleichung

$$(15.) \quad \Psi'_n(y, x) = y_1, \quad f'_{k-a_1}(y_1, x) = y_2, \quad \varphi_{m-k}(y_2, x) = 0.$$

Man hat nun dasselbe Verfahren in Bezug auf Φ'_{m-a_1} und f'_{k-a_1} anzuwenden.

b.) Verallgemeinerung des Satzes Abh. Bd. 83 No. 7 VII *b.*). Es sei

(16.) $f_{a_0}(y, x) = y_1, \; f_{a_1}(y_1, x) = y_2, \; \dots \; f_{a_{l-1}}(y_{l-1}, x) = y_l, \; f_{a_l}(y_l, x)$

ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke, in dem je zwei Bestandtheile nicht ähnlich sind. Der reguläre Differentialausdruck in $f_{a_b}(y, x)$ sei $\bar{f}_{a_b}(\bar{y}, x)$, der determinirende Factor $\Omega_b = e^{W_b}$. Die Differentialgleichungen $\bar{f}_{a_b}(\bar{y}, x) = 0$ ($b = 0 \dots l$) sollen so beschaffen sein, dass jede einen solchen im Endlichen oder Unendlichen liegenden Punkt $x = A_b$ enthält, bei welchem keine Wurzel ihrer Exponentengleichung sich um eine ganze Zahl unterscheidet von einer Wurzel der bei diesem Punkte bestehenden Exponentengleichungen *derjenigen* übrigen Differentialgleichungen, denen in f_{a_b} determinirende Factoren zugehören, in welchen die Glieder der in Partialbrüche zerlegten rationalen Functionen W_b, die in diesem Punkte unendlich werden, übereinstimmen. Alsdann gelten die Abh. Bd. 83 No. 7 VII *b.*) gemachten Untersuchungen, die sich auf die Durchführung der verschiedenen Darstellungen des Differentialausdruckes (16.) beziehen, und die darauf hinauskommen, dass man die erforderlichen formellen Entwickelungen von Integralen immer bei den Punkten A_b vornehmen kann, und die Coefficienten innerhalb der Entwickelungen eindeutig bestimmt erhält.

7.

Es soll in dieser und der folgenden Nummer das in Abh. Bd. 83 gegebene Verfahren, aus einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten eine solche herzuleiten, deren Integrale jene erfüllen und deren Differentialausdruck ein System normaler Ausdrücke ist, vereinfacht und das bezügliche allgemeine Verfahren dargestellt werden. In dieser Nummer werden folgende Untersuchungen aus Abh. Bd. 83 vereinfacht und weiter erörtert: in I. der Beweis des Satzes über die Vereinigung der Integrale zweier homogener linearer Differentialgleichungen in einer solchen Differentialgleichung (l. c. No. 2); in II. das Verfahren, aus einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten eine solche mit nur regulären Integralen, die in der ersten enthalten sind, herzuleiten (l. c. No. 5); in III. das Verfahren, aus einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten den determinirenden Factor in einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdrucke, deren Integrale in jener enthalten sind, zu bilden (l. c. No. 6).

I. Vereinfachung des Beweises des in Abh. Bd. 83 No. 2 I. gegebenen Satzes, der sich auf die Vereinigung der Integrale zweier homogener linearer Differentialgleichungen m^{ter} und n^{ter} Ordnung $\Phi_m(y,x)=0$ und $\Psi_n(y,x)=0$, deren Integrale von einander linearunabhängig sind, in einer homogenen linearen Differentialgleichung $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung $F_{m+n}(y,x)=0$ bezieht. Der Coefficient der höchsten Ableitung in $\Phi_m=0$, $\Psi_n=0$, $F_{m+n}=0$ ist gleich 1 gesetzt. Es werden in $\Phi_m(y,x)=s$ n linearunabhängige Integrale von $\Psi_n=0$ eingesetzt, so erhält man n linearunabhängige Werthe s_1 bis s_n, welche eine homogene lineare Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $\psi_n(s,x)=0$ erfüllen, die aufzusuchen ist. Dann ist $\Phi_m(y,x)=s$, $\psi_n(s,x)=0$ die gesuchte Differentialgleichung. In $\Phi_m(y,x)=s$ werden die Differentialquotienten von höherer als der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung vermittelst der Differentialgleichung $\Psi_n(y,x)=0$ durch solche der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und niedrigerer Ordnungen ausgedrückt; dadurch gehe $\Phi_m(y,x)=s$ über in

$$(1.)\qquad Q_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+Q_n y \;=\; s,$$

wo die Grössen Q nicht alle gleich Null sein können. Differentiirt man die Gleichung (1.) und reducirt die Ordnung vermittelst der Differentialgleichung $\Psi_n=0$ und wendet man dieses Verfahren successive n-mal an, so erhält man

$$(2.)\qquad Q_1^{(\alpha)}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+Q_2^{(\alpha)}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+Q_n^{(\alpha)}y=\frac{d^\alpha s}{dx^\alpha}\quad(\alpha=1\ldots n).$$

Aus dem Systeme der Gleichungen (1.) und (2.) geht durch Elimination der Grössen y bis $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ die Differentialgleichung hervor:

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 & \ldots & Q_n & s \\ Q_1^{(1)} & Q_2^{(1)} & \ldots & Q_n^{(1)} & \frac{ds}{dx} \\ \vdots & & & & \\ Q_1^{(n)} & Q_2^{(n)} & \ldots & Q_n^{(n)} & \frac{d^n s}{dx^n} \end{vmatrix} = 0,$$

welcher die Grössen s_1 bis s_n genügen. Dividirt man durch den Coefficienten von $\frac{d^n s}{dx^n}$ in (3.), nämlich die Determinante $\Sigma\pm Q_1Q_2^{(1)}\ldots Q_n^{(n-1)}$, welche nicht identisch Null ist, so erhält man die gesuchte Differentialgleichung $\psi_n(s,x)=0$. Dass die Determinante $\Sigma\pm Q_1Q_2^{(1)}\ldots Q_n^{(n-1)}$ nicht identisch Null ist, ergiebt sich daraus, dass, wenn dieselbe in einem Gebiete von x Null wäre, sich Grössen λ_1 bis λ_n, die nicht alle gleich Null sind,

aus Unterdeterminanten der Determinante durch Addition und Subtraction bilden lassen würden, welche das Gleichungssystem

$$(4.)\qquad \lambda_1 Q_\alpha + \lambda_2 Q_\alpha^{(1)} + \cdots + \lambda_n Q_\alpha^{(n-1)} = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots n)$$

befriedigen. Multiplicirt man dann die Gleichung (1.) und die $n-1$ ersten (2.) bezüglich mit λ_1 bis λ_n und addirt, so würde sich die Differentialgleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ergeben

$$(5.)\qquad \lambda_n \frac{d^{n-1}s}{dx^{n-1}} + \lambda_{n-1} \frac{d^{n-2}s}{dx^{n-2}} + \cdots + \lambda_1 s \;=\; 0$$

mit Coefficienten, die nicht alle verschwinden, und dieser Differentialgleichung müssten die n linearunabhängigen Grössen s_1 bis s_n genügen, was nicht angeht. (Vgl. Abh. Bd. 75 No. 2 (2.), Bd. 87 No. 7 III *b*.).

II. Vereinfachung des in Abh. Bd. 83 No. 5 entwickelten Verfahrens, die Aufgabe zu lösen: Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten $F_m(y, x) = 0$ m^{ter} Ordnung vorliegt, in welcher der grösste charakteristische Index kleiner als m ist, wo

$$(6.)\qquad F_m(y, x) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y$$

sei, so soll untersucht werden, ob sich $F_m(y, x)$ unter der Form

$$(7.)\qquad F_{m-k}(y, x) = s,\; f_k(s, x),$$

wo $F_{m-k}(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, darstellen lässt. Es sei

$$(8.)\qquad F_{m-k}(y, x) \;=\; \frac{d^{m-k}y}{dx^{m-k}} + p_1^{(k)} \frac{d^{m-k-1}y}{dx^{m-k-1}} + \cdots + p_{m-k}^{(k)} y$$

und

$$(9.)\qquad f_k(s, x) \;=\; \frac{d^k s}{dx^k} + g_1 \frac{d^{k-1}s}{dx^{k-1}} + \cdots + g_k s;$$

die Coefficienten g müssen dann rational sein. Die singulären Punkte der Differentialgleichung $F_m = 0$ im Endlichen seien a_1 bis $a_\varkappa$. Wenn die Differentialgleichung $F_{m-k} = 0$ im Endlichen noch andere singuläre Punkte besitzt, so seien diese $a_{\varkappa+1}$ bis $a_{\varkappa+\lambda}$, dieselben sind für $F_{m-k} = 0$ ausserwesentlich singuläre. Nun ist

$$(10.)\qquad p_1^{(k)} \;=\; \sum_1^{\varkappa} \frac{\alpha_a}{x-a_a} + \sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \frac{\alpha_a}{x-a_a},$$

wo $\alpha_a (a = \varkappa+1, \ldots \varkappa+\lambda)$ eine negative ganze Zahl ist, und wo $\sum_1^{\varkappa} \frac{\alpha_a}{x-a_a}$ wegfällt, wenn $F_m = 0$ im Endlichen keinen singulären Punkt besitzt,

$\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \frac{\alpha_{\mathfrak{a}}}{x-a_{\mathfrak{a}}}$ wegfällt, wenn $F_{m-k}=0$ im Endlichen keine neuen singulären Punkte hat. Die möglichen Werthe der Coefficienten $\alpha_{\mathfrak{a}}$ $(\mathfrak{a}=1\ldots\varkappa)$ ergeben sich in endlicher Anzahl nach den Abh. Bd. 83 No. 5 gegebenen Vorschriften und werden mittels je $m-k$ Wurzeln der Exponentengleichungen von $F_m=0$ bei $a_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}=1\ldots\varkappa)$ bestimmt. $\sum_{\varkappa+1}^{\varkappa+\lambda} \frac{\alpha_{\mathfrak{a}}}{x-a_{\mathfrak{a}}}$ ist $=-\frac{d\log\Phi(x)}{dx}$, wo $\Phi(x)$ eine ganze rationale Function von x ist, deren Grad und deren Coefficienten nach den dort gemachten Angaben ermittelt werden.

Die Vereinfachung, die hier angebracht wird, besteht nun darin, dass man die weitere Untersuchung durchführen kann, ohne vorher die Wurzeln der Gleichung $\Phi(x)=0$ aufzusuchen.

Wenn man durch den grössten gemeinschaftlichen Factor der Polynome $\Phi(x)$ und $\frac{d\Phi(x)}{dx}$ das Polynom $\Phi(x)$ theilt, so erhält man ein Polynom $\chi(x)$, wo

$$(11.)\qquad \chi(x) = (x-a_{\varkappa+1})(x-a_{\varkappa+2})\ldots(x-a_{\varkappa+\lambda}).$$

Es werde ferner

$$(12.)\qquad \varphi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\varkappa})$$

gesetzt. Nun muss jeder Coefficient $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ $(\mathfrak{b}=1\ldots m-k)$ die Form haben

$$(13.)\qquad p_{\mathfrak{b}}^{(k)} = \frac{\psi_{\mathfrak{b}}(x)}{[\varphi(x)\chi(x)]^{\mathfrak{b}}},$$

wo $\psi_{\mathfrak{b}}(x)$ eine ganze rationale Function von einem Grade $\leqq(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}$. Um nun $\psi_{\mathfrak{b}}(x)$ für $\mathfrak{b}=2,\ldots m-k$ zu bestimmen, wird nach den Vorschriften von Abh. Bd. 83 No. 5 bei einem singulären Punkte der ursprünglichen Differentialgleichung $F_m=0$ aus dieser die formelle Entwickelung der Integrale von $F_{m-k}=0$ entnommen und, wenn dieser Punkt A ist, mittels derselben die formelle Entwickelung von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ nach aufsteigenden Potenzen von $x-A$ gebildet; diese beginnt mit $\frac{c_{-\mathfrak{b}}}{(x-A)^{\mathfrak{b}}}$. Nun wird aus (13.) die Gleichung

$$(14.)\qquad p_{\mathfrak{b}}^{(k)}[\varphi(A+x-A)\chi(A+x-A)]^{\mathfrak{b}} = \psi_{\mathfrak{b}}(A+x-A)$$

hergeleitet, und aus dieser die ganze rationale Function von $x-A$ bis zur Potenz $(x-A)^{(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}}$, die auf der linken Seite steht, entnommen; dieselbe muss gleich $\psi_{\mathfrak{b}}(x)$ sein. Hierzu müssen in der formellen Entwickelung von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ die $(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}+1$ ersten Glieder von $\frac{1}{(x-A)^{\mathfrak{b}}}$ an gerechnet bekannt

sein. Wird die formelle Entwickelung von $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ vorgenommen, so werde

$$F_m(y, x) = (-t^2)^m F'_m(y, t), \quad F_{m-k}(y, x) = (-t^2)^{m-k} F'_{m-k}(y, t)$$

gesetzt, die Coefficienten in F'_m durch $p'_{\mathfrak{a}}$, in $F'_{\mathfrak{a}-k}$ durch $p_{\mathfrak{a}}^{(k)\prime}$ bezeichnet. Die Integrale von $F'_{m-k}(y, t) = 0$ erfüllen die Differentialgleichung $F'_m(y, t) = 0$, und es ist nun aus letzterer Differentialgleichung die formelle Entwickelung der Coefficienten $p_{\mathfrak{a}}^{(k)\prime}$ herzuleiten. Aus diesen erhält man die formelle Entwickelung von $t^{-\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{b}}^{(k)}(t^{-1})$, welches eine homogene lineare Function von $t^{\mathfrak{c}} p_{\mathfrak{c}}^{(k)\prime}$ ($\mathfrak{c} = 0 \dots \mathfrak{b}$, $p_0^{(k)\prime} = 1$) mit numerischen Coefficienten ist. Dann leitet man aus Gleichung (13.) her

$$(15.) \qquad t^{-\mathfrak{b}} p_{\mathfrak{b}}^{(k)}(t^{-1}) [\varphi(t^{-1}) \chi(t^{-1}) t^{(\varkappa+\lambda)}]^{\mathfrak{b}} = \psi_{\mathfrak{b}}(t^{-1}) t^{(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}}$$

und erhält aus der ganzen rationalen Function von t, die bis zur Potenz $t^{(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}}$ geht, auf der linken Seite die Function $\psi_{\mathfrak{b}}(t^{-1}) t^{(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}}$. Hierzu müssen in der formellen Entwickelung von $p_{\mathfrak{c}}^{(k)\prime}$ die $(\varkappa+\lambda-1)\mathfrak{b}+1$ ersten Glieder von $\frac{1}{t^{\mathfrak{c}}}$ an gerechnet bekannt sein.

Es genügt, die Coefficienten $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ ($\mathfrak{b} = 1 \dots k$) auf die angegebene Weise zu bestimmen. Alsdann werden aus dem Gleichungssysteme zwischen den Grössen p, $p^{(k)}$ und g, welches man aus der für jede Function y geltenden Gleichung $F_m(y, x) = f_k(F_{m-k}(y, x), x)$ herleitet, zuerst die Grössen g, hierauf die übrigen Grössen $p_{\mathfrak{b}}^{(k)}$ ($\mathfrak{b} = k+1 \dots m-k$) eindeutig bestimmt, und nun ist nothwendig und hinreichend, dass auch die übrigen Gleichungen dieses Systemes durch die gefundenen Grössen $p^{(k)}$ und g erfüllt sind, damit F_m durch das System (7.) dargestellt wird, so dass F_{m-k} regulär ist, wie in Abh. Bd. 83 No. 5 p. 110 angegeben.

Man kann also die Ausdrücke F_{m-k} und f_k aufstellen und die Bedingungen, ob das System (7.) *F_m darstellt und F_{m-k} regulär ist, prüfen, ohne dass die Wurzeln der Gleichung $\Phi(x) = 0$ bekannt sind.*

Dieser Umstand ist für die Auflösung eines homogenen linearen Differentialausdruckes mit rationalen Coefficienten in ein System normaler Differentialausdrücke von Wichtigkeit und wird zu diesem Zwecke in No. 8 weiter verwandt werden.

III. $F_m(y, x)$ sei ein homogener linearer Differentialausdruck m^{ter} Ordnung mit beliebigen rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, so beschaffen, dass in der Differentialgleichung

$F_m = 0$ der grösste charakteristische Index grösser als Null ist. Wenn untersucht werden soll, ob $F_m = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung enthält, in welcher ein normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt ist, dessen determinirender Factor von 1 verschieden ist, so ist zunächst zu ermitteln, ob und welche rationale Function W es giebt, so dass in $e^{-W}F_m(e^W y, x) = 0$ der grösste charakteristische Index kleiner als m wird. Und hierzu ist zu untersuchen, ob und welche Ausdrücke von der Form $\sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ bei einem singulären Punkte $x = a$ in $F_m = 0$, bei welchem der charakteristische Index grösser als Null ist, vorhanden sind, so dass in $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index bei $x = a$ kleiner als m wird. Entsprechend bei $x = \infty$ durch die Substitution $x = t^{-1}$, wenn bei $t = 0$ der charakteristische Index grösser als Null ist. Das Verfahren, diese Grössen w zu bestimmen, ist in Abh. Bd. 83 No. 6 im Anschlusse an Abh. Bd. 76 No. 6 entwickelt. Ueber dieses Verfahren werden hier Untersuchungen angestellt zu dem Zwecke, wenn $F_m = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung enthält, in der ein System von Differentialausdrücken gleich Null gesetzt ist, die in einem Kreise um $x = a$ sich wie die bei $x = a$ normalen Differentialausdrücke (No. 5 I a.)) verhalten, alsdann alle Grössen w in den determinirenden Factoren der Bestandtheile unmittelbar aus $F_m = 0$ zu bestimmen und zu zeigen, dass die Ermittelung der Grössen w von der Form $\sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ und der Eigenschaft, dass in $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index bei $x = a$ kleiner als m wird, meist auf keine algebraischen Schwierigkeiten führt.

a.) Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ sei durch das System dargestellt

$$(16.) \qquad P_\varkappa(y, x) = s, \quad Q_\lambda(s, x).$$

$P_\varkappa$ ist ein Differentialausdruck $\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung, für $\varkappa = 0$ gleich y, für $\varkappa > 0$ gleich dem Systeme

$$(17.) \qquad g_{\mathfrak{a}_0}(y, x) = y_1, \quad g_{\mathfrak{a}_1}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad g_{\mathfrak{a}_l}(y_l, x),$$

wo

$$(18.) \qquad g_{\mathfrak{a}_\mathfrak{t}}(y, x) = e^{w_\mathfrak{t}}\bar{g}_{\mathfrak{a}_\mathfrak{t}}(e^{-w_\mathfrak{t}}y, x),$$

$w_\mathfrak{t}$ gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$, $\bar{g}_{\mathfrak{a}_\mathfrak{t}}(\bar{y}, x) = 0$ eine homogene lineare Differentialgleichung $\mathfrak{a}_\mathfrak{t}^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Coefficienten in einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt, abgesehen von diesem Punkte, einwerthige

und stetige analytische Functionen und für $x = a$ in endlicher Ordnung unendlich sind, bei welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1, der charakteristische Index bei $x = a$ gleich Null ist. Ein Differentialausdruck g_{a_ε} von der Form (18.) nimmt eine solche Form nur auf *eine* Weise an, was wie in No. 5 I. bewiesen wird; e^{w_ε} heisse der determinirende Factor in diesem Ausdrucke. Q_λ ist ein homogener linearer Differentialausdruck λ^{ter} Ordnung für $\lambda = 0$ gleich s; für $\lambda > 0$ seien die Coefficienten in demselben in einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig und für $x = a$ in endlicher Ordnung unendlich, der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1, und in $Q_\lambda = 0$ seien nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung $g_{a_\varepsilon} = 0$, wo g_{a_ε} von der Form (18.) ist, enthalten.

Die Integrale von $\bar{g}_{a_\varepsilon} = 0$ sind unter der Form No. 1 (7.) (8.), die Integrale von $g_{a_\varepsilon} = 0$ unter der Form No. 1 (9.) (10.) darstellbar; hieraus folgt (Abh. Bd. 76 No. 1, 2 oder Abh. Bd. 83 No. 7 V. (20.)), dass $g_{a_\varepsilon}(y, x)$ durch das System ausgedrückt wird

$$(19.)\qquad \frac{dy}{dx} + q_1 y = y_1,\quad \frac{dy_1}{dx} + q_2 y_1 = y_2,\quad \ldots\quad \frac{dy_{a_\varepsilon - 1}}{dx} + q_{a_\varepsilon} y_{a_\varepsilon - 1},$$

wo

$$(20.)\qquad \frac{dy}{dx} + q_b y = e^{w_\varepsilon}\Big(\frac{de^{-w_\varepsilon} y}{dx} + \bar{q}_b e^{-w_\varepsilon} y\Big)$$

ist, $\bar{q}_b$ in einem Kreise um $x = a$, abgesehen vom Mittelpunkte, einwerthig und stetig und für $x = a$ der charakteristische Index in $\frac{dy}{dx} + \bar{q}_b y = 0$ gleich Null. Daher wird $P_\varkappa(y, x)$ durch ein System von der Form

$$(21.)\qquad \gamma_{(1)}(y, x) = y_1,\quad \gamma_{(2)}(y_1, x) = y_2,\quad \ldots\quad \gamma_{(\varkappa)}(y_{\varkappa-1}, x)$$

dargestellt, worin

$$(22.)\qquad \gamma_{(a)} = e^{w_{(a)}}\Big(\frac{de^{-w_{(a)}} y}{dx} + \bar{q}_{(a)} e^{-w_{(a)}} y\Big),$$

$w_{(a)}$ gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$, $\bar{q}_{(a)}$ in einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig, in $\frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{q}_{(a)}\bar{y} = 0$ bei $x = a$ der charakteristische Index gleich Null ist.

Nun ist in Abh. Bd. 76 No. 5 Satz II mittels der Ausdrücke der Integrale von $P_\varkappa = 0$ unter der Form No. 1 (11.), (12.) gezeigt worden,

wenn eine Darstellung von $F_m(y, x)$ unter der Form

$$(23.) \quad p_{\varkappa'}(y, x) = s', \quad q_{\lambda'}(s', x)$$

besteht, wo $p_{\varkappa'}$ ein System von der Art (21.) ist, $q_{\lambda'}$ ein Differentialausdruck von der Art von $Q_\lambda(y, x)$, so dass in $q_{\lambda'} = 0$ nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung $g_{a_\varepsilon} = 0$ enthalten sind, wo g_{a_ε} die Form (18.) hat, dass alsdann $p_{\varkappa'}$ mit $P_\varkappa$ und daher $q_{\lambda'}$ mit Q_λ übereinstimmt. Dasselbe kann man mittels des in Abh. Bd. 83 No. 4 bei einem Systeme normaler Differentialausdrücke angewandten Verfahrens zeigen, indem man dieses Verfahren bei der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$, worin F_m durch das System (16.), $P_\varkappa$ durch das System (21.) ersetzt ist, gebraucht. Zu dem Zwecke kommt der Satz in Anwendung, dass, wenn man die linearunabhängigen Integrale zweier Differentialgleichungen $\Phi_1(y, x) = 0$ und $\Psi_1(y, x) = 0$, wo Φ_1 und Ψ_1 die Form (22.) haben, in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt, diese die Form erhält (vgl. I in dieser Nummer)

$$(24.) \quad \begin{cases} \Phi_1(y, x) = s, \ \psi_1(s, x) = 0, \\ \Psi_1(y, x) = s', \ \varphi_1(s', x) = 0, \end{cases}$$

wo ψ_1 und φ_1 von der Form (22.), und ψ_1 ähnlich ist Ψ_1, φ_1 ähnlich Φ_1, indem zwei Ausdrücke der Form (22.) *ähnlich* genannt werden, wenn die determinirenden Factoren übereinstimmen und die Wurzel der Exponentengleichung von $\frac{d\bar{y}}{dx} + \bar{q}\,\bar{y} = 0$ bei dem einen Ausdruck sich von der Wurzel der Exponentengleichung bei dem anderen Ausdrucke nur um eine ganze Zahl unterscheidet. Zwei Systeme von Differentialausdrücken der Form (22.) heissen *ähnlich*, wenn sie gleichviele Bestandtheile enthalten, und die Bestandtheile von derselben Stelle in beiden ähnlich sind. Nun ergiebt sich nach dem Verfahren Abh. Bd. 83 No. 4: Wenn $F_m = 0$ ein Integral enthält, welches eine Differentialgleichung $\gamma = 0$, wo γ von der Form (22.) ist, erfüllt, so ist $P_\varkappa$ durch ein System wie (21.) darstellbar, an dessen Spitze der obengenannte Differentialausdruck steht, und die übrigen Bestandtheile bilden ein System, welches dem System (21.) ähnlich ist, nachdem aus diesem ein gewisser, γ ähnlicher Bestandtheil herausgenommen ist. Und hieraus folgt weiter, wenn $F_m(y, x)$ eine Darstellung von der Beschaffenheit (23.) hat, *so enthält das System $p_\varkappa$, eben so viele Bestandtheile wie $P_\varkappa$ und die Bestandtheile dieser beiden Systeme können so gepaart werden, dass in demselben Paare ähnliche Ausdrücke stehen.*

Setzt man $e^{-w_\iota} F_m(e^{w_\iota} y, x)$, so wird dieser Ausdruck dargestellt durch

$$(25.)\quad \begin{cases} e^{-w_\iota} g_{\alpha_0}(e^{w_\iota} y, x) = y_1', \; e^{-w_\iota} g_{\alpha_1}(e^{w_\iota} y_1', x) = y_2', \; \dots \; e^{-w_\iota} g_{\alpha_l}(e^{w_\iota} y_l', x) = s', \\ \qquad e^{-w_\iota} Q_\lambda(e^{w_\iota} s', x), \end{cases}$$

und da in $\bar{g}_{\alpha_\iota}(y, x) = 0$ der charakteristische Index gleich Null, so wird der charakteristische Index in $e^{-w_\iota} F_m(e^{w_\iota} y, x) = 0$ kleiner als m.

Unter den Grössen w von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, die bewirken, dass in $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index kleiner als m wird, befinden sich also die Grössen w_ι, die in den determinirenden Factoren der Bestandtheile des Systemes (21.) von P_x vorkommen.

b.) Wenn nun die Grössen w von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ so bestimmt werden sollen, dass in $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index bei $x = a$ kleiner als m wird, so muss in $F_m = 0$ der charakteristische Index h grösser als Null sein, und man hat nach Abh. Bd. 83 No. 6 in folgender Weise zu verfahren. Von der Grösse $\frac{dw}{dx} = z$ wird zunächst das Anfangsglied $-n\, c_{-n}(x-a)^{-(n+1)}$ dadurch bestimmt, dass die Werthe desselben aus den Grössen $\sigma(x-a)^{-(n+1)}$ hervorgehen, die so beschaffen sind, dass, wenn man eine solche Grösse für z in den Ausdruck

$$(26.)\quad z^h + p_1 z^{h-1} + \cdots + p_h$$

einsetzt, wo p_α der Coefficient von $\frac{d^{m-\alpha} y}{dx^{m-\alpha}}$ in $F_m(y, x)$ ist, und nun die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ nimmt, die in den Entwickelungen nach Potenzen von $x-a$ der $h+1$ Summanden von (26.) z^h, $p_1 z^{h-1}$ bis p_h vorkommt, diese Potenz aus dem Gesammtausdrucke (26.) ausfällt. Wie die Werthe des Exponenten $n+1$ in diesen Grössen $\sigma(x-a)^{-(n+1)}$ zu finden sind, ist in Abh. Bd. 83 No. 6 im Anschluss an Abh. Bd. 76 No. 6 angegeben; dieselben werden aus den Ordnungszahlen, in denen $p_\alpha(\alpha = 1, \dots h)$ für $x = a$ unendlich wird, hergeleitet. Die Werthe der Coefficienten σ, die zu einem Werthe von $n+1$ gehören, werden durch die Wurzeln einer daselbst angegebenen *algebraischen* Gleichung geliefert, ***deren Gleichungspolynom mittels Constanten aus den Entwickelungen der Grössen p_1 bis p_h nach Potenzen von $x-a$ dargestellt wird;*** diese Gleichung ist ***Coefficientengleichung*** genannt worden. Die sämmtlichen Grössen $\sigma(x-a)^{-(n+1)}$, in welchen für $n+1$ alle durch die bei (26.) angegebene Bedingung bestimmten Werthe

auftreten, und bei demselben Werthe von $n+1$ für σ alle Wurzeln der zugehörigen Coefficientengleichung vorkommen, sind die ***Hauptpotenzen*** von $F_m(y,x)=0$ bei $x=a$ genannt worden. Ihre Anzahl ist höchstens gleich h.

Ist σ eine *einfache* Wurzel der Coefficientengleichung bei einem Exponenten $n+1$, so werden alle folgenden Coefficienten in z durch algebraische Gleichungen ersten Grades eindeutig bestimmt, und der charakteristische Index in $e^{-w}F_m(e^w y,x)=0$ wird gleich $m-1$. Ist σ *eine ϱ-fache* Wurzel der Coefficientengleichung, so werden die weiteren Coefficienten in w in folgender Weise ermittelt. Es wird mit dem gefundenen Werthe $c_{-n}(x-a)^{-n}$ gebildet $e^{-c_{-n}(x-a)^{-n}}F_m(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}}y,x)=F_m^{(1)}(y,x)$. Dann sind die Grössen $w^{(1)}=\sum_1^{n-1}c_{-a}(x-a)^{-a}$, wo n den gegebenen Werth hat, $c_{-(n-1)}$ auch Null sein darf, zu bestimmen, so dass in $e^{-w^{(1)}}F_m^{(1)}(e^{w^{(1)}}y,x)=0$ bei $x=a$ der charakteristische Index kleiner als m wird. Um $c_{-(n-1)}$ zu erhalten, ist zuzusehen, ob es Hauptpotenzen aus $F_m^{(1)}(y,x)=0$ giebt, in denen der Exponent von $(x-a)^{-1}$ gleich oder kleiner als n ist. Im ersten Falle ergiebt sich $c_{-(n-1)}$ von Null verschieden, im zweiten Falle können die Coefficienten $c_{-a}(\mathfrak{a}=n-1,\dots\nu)$ gleich Null gesetzt werden. Ist in $F_m^{(1)}(y,x)=0$ bereits der charakteristische Index kleiner als m, so können alle Coefficienten c_{-a} $(\mathfrak{a}=n-1,\dots 1)$ in $w^{(1)}$ gleich Null gesetzt werden. Der charakteristische Index in $F_m^{(1)}(y,x)=0$ kann nicht kleiner als $m-\varrho$ sein; denn der Coefficient von $\frac{d^\varrho y}{dx^\varrho}$ in $F_m^{(1)}=0$ wird in einer Ordnung für $x=a$ unendlich, die $\geqq(m-\varrho)(n+1)$ ist, und der Coefficient von $\frac{d^{\varrho+\mathfrak{b}}y}{dx^{\varrho+\mathfrak{b}}}$ in einer Ordnung, die um wenigstens $\mathfrak{b}(n+1)$ niedriger ist, als die Ordnung, in welcher der Coefficient von $\frac{d^\varrho y}{dx^\varrho}$ unendlich wird, was in Abh. Bd. 83 p. 120, 121 bewiesen ist und darauf beruht, dass, wenn das Polynom (26.) durch $f(z)$ bezeichnet wird, aus $\frac{d^\varrho z^{m-h}f(z)}{dz^\varrho}$ für $z=-nc_{-n}(x-a)^{-(n+1)}$ die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden $\frac{d^\varrho z^m}{dz^\varrho}$, $p_1\frac{d^\varrho z^{m-1}}{dz^\varrho}$ etc. vorkommt, nicht ausfällt. Der charakteristische Index in $F_m^{(1)}=0$ sei $m-\tau$. Die Anzahl der Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m^{(1)}=0$ ist τ $(\geqq 0)$. Um aus $F_m^{(1)}=0$ die Hauptpotenzen, in denen der Exponent von $(x-a)^{-1}$ gleich oder kleiner als n ist, zu erhalten, hat man, wenn der Coefficient von $\frac{d^{m-a}y}{dx^{m-a}}$ in $F_m^{(1)}$ durch $p_a^{(1)}$ bezeichnet wird, die Hauptpotenzen aus dem Ausdrucke

$$(27.)\qquad z^{(1)^{m-\tau}}+p_1^{(1)}z^{(1)^{m-\tau-1}}+\cdots+p_{m-\tau}^{(1)}$$

mit dem Exponenten $\leqq n$ aufzustellen. Aus den vorhin gemachten Angaben über die Ordnungen, in welchen $p_1^{(1)}$ bis $p_{m-\varrho}^{(1)}$ für $x=a$ unendlich werden, folgt nun: wenn man $z^{(1)}=\sigma(x-a)^{-\nu}$, $\nu\leqq n$ setzt, so kommen in den Summanden von (27.) $z^{(1)^{m-\tau}}$ bis $p_{m-\varrho-1}^{(1)}z^{(1)^{m-\tau-(m-\varrho-1)}}$ niedrigere Potenzen von $(x-a)^{-1}$ vor als in dem Summanden $p_{m-\varrho}^{(1)}z^{(1)^{m-\tau-(m-\varrho)}}$. Die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die sich nach Substitution von $z^{(1)}=\sigma(x-a)^{-\nu}$, $\nu\leqq n$, aus den Summanden von (27.) ergiebt, kommt also nur in den Summanden des Ausdruckes

$$(28.)\qquad p_{m-\varrho}^{(1)}z^{(1)^{m-\tau-(m-\varrho)}}+p_{m-\varrho+1}^{(1)}z^{(1)^{m-\tau-(m-\varrho-1)}}+\cdots+p_{m-\tau}^{(1)}$$

vor. Und damit dieselbe aus letzterem Ausdrucke ausfällt, ist nothwendig und hinreichend, dass die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$, die in den Summanden des Ausdruckes

$$(29.)\qquad z^{(1)^{\varrho-\tau}}+\frac{p_{m-\varrho+1}^{(1)}}{p_{m-\varrho}^{(1)}}z^{(1)^{\varrho-\tau-1}}+\cdots+\frac{p_{m-\tau}^{(1)}}{p_{m-\varrho}^{(1)}}$$

vorkommt, aus dem Gesammtausdrucke (29.) ausfällt, in welchem Ausdrucke der charakteristische Index des Coefficientensystems $1,\ \frac{p_{m-\varrho+1}^{(1)}}{p_{m-\varrho}^{(1)}}$ bis $\frac{p_{m-\tau}^{(1)}}{p_{m-\varrho}^{(1)}}$ gleich $\varrho-\tau$ ist. Es gehen also die Hauptpotenzen von $F_m^{(1)}=0$, in denen der Exponent von $(x-a)^{-1}$ gleich oder kleiner als n ist, aus dem Ausdrucke (29.) hervor, und dieser Ausdruck hat überhaupt *höchstens $\varrho-\tau$ Hauptpotenzen.* Ist also $\tau>0$, so kann man $c_{-\alpha}(\alpha=n-1,\dots 1)$ gleich Null setzen. Es sei ferner eine Hauptpotenz von $F_m^{(1)}=0$ mit dem Exponenten $\nu\leqq n$ vorhanden. Im Falle $\nu<n$ kann $c_{-\alpha}(\alpha=n-1,\dots \nu)$ gleich Null gesetzt werden. Man erhält nun den Coefficienten $c_{-(\nu-1)}$ $(\nu\leqq n)$ in w, und hat dann weiter, um die folgenden Coefficienten in w zu finden, mittels der Hauptpotenz $-c_{-(\nu-1)}(x-a)^{-\nu}$ auf $F_m^{(1)}=0$ dasselbe Verfahren anzuwenden, welches auf $F_m=0$ angewandt worden ist.

Es ergiebt sich schliesslich in Bezug auf den Fall einer ϱ-fachen Wurzel $-nc_{-n}$ einer Coefficientengleichung von $F_m(y,x)=0$: Wenn man die mit $c_{-n}(x-a)^{-n}$ beginnenden Grössen w, die unter einander verschieden sind, nimmt und mit jeder derselben $e^{-w}F_m(e^w y,x)=0$ bildet, und die Anzahl der Wurzeln der Exponentengleichungen bei $x=a$, *die den verschiedenen w entsprechen,* aufstellt, so ist *diese Anzahl höchstens ϱ.*

Nimmt man nun die Anzahl der Wurzeln der Exponentengleichungen bei $x = a$, die den sämmtlichen Grössen w in $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ entsprechen, *so ist diese Zahl höchstens gleich der Anzahl der Hauptpotenzen von* $F_m = 0$ *bei* $x = a$.

Wenn von den Coefficienten p_a in $F_m(y, x)$ vorausgesetzt wird, dass diese in einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig sind und für $x = a$ in endlicher Ordnung unendlich werden, so bleibt das vorstehende Verfahren, die Grössen $w = \sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ zu bestimmen, so dass in $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index kleiner als m wird, und es werden dieselben Benennungen angewandt.

c.) Um nun für den Fall, dass der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ durch das System (16.) dargestellt ist, die Grössen w weiter zu untersuchen, wird der in Abh. Bd. 83 No. 6 III bewiesene Satz angewandt, der dort bei rationalen Coefficienten der Differentialausdrücke gegeben ist, aber in derselben Weise bewiesen wird, wenn die Coefficienten in einem Kreise um $x = a$, abgesehen von diesem Punkte, einwerthig und stetig sind und für $x = a$ in endlicher Ordnung unendlich werden. Wenn $F_{m-k}(y, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung, $f_k(s, x)$ ein solcher k^{ter} Ordnung ist, der Coefficient der höchsten Ableitung in beiden gleich 1 ist, und der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ durch das System

$$(30.)\qquad F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x)$$

dargestellt wird, *so sind die Hauptpotenzen von* F_{m-k} *und die von* f_k *bei* $x = a$ *zusammen die von* F_m. *Ein Ausdruck* $g_{a_t}(y, x)$ *von der Form* (18.) *hat* a_t *einander gleiche Hauptpotenzen, nämlich die Potenz von* $(x-a)^{-1}$ *mit dem höchsten Exponenten und zugehörigen Coefficienten aus* $\frac{dw_t}{dx}$.

Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ habe nun die Darstellung (16.), wo $P_x(y, x)$ durch das System (17.) gegeben ist. Es werde vorausgesetzt, $Q_\lambda(s, x)$ enthalte keine Hauptpotenz bei $x = a$. Dann ergeben sich nach dem vorhin angeführten Satze die Hauptpotenzen von $F_m(y, x)$ aus den Hauptpotenzen von g_{a_t} $(t = 0, \dots l)$, es tritt also aus jeder der Grössen $\frac{dw_t}{dx}$ die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ a_t-mal auf. Entnimmt man nun aus einem w_t die höchste Potenz von $(x-a)^{-1}$ $c_{-n}(x-a)^{-n}$ und bildet

$$e^{-c_{-n}(x-a)^{-n}} F_m(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}} y, x) = F_m^{(1)}(y, x),$$

so enthält

$$e^{-c_{-n}(x-a)^{-n}}Q_\lambda(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}}s, x) = Q_\lambda^{(1)}(s, x)$$

keine Hauptpotenz mit dem Exponenten von $(x-a)^{-1}$ gleich oder kleiner als n. Der charakteristische Index in $Q_\lambda^{(1)} = 0$ ist λ. Denn wenn Q_λ keine Hauptpotenz enthält oder nur solche enthielte, in denen der Exponent von $(x-a)^{-1}$ grösser als $n+1$ ist, und in $Q_\lambda^{(1)}$ die Coefficienten durch $q_1^{(1)}$ bis $q_\lambda^{(1)}$ bezeichnet werden, so wird nach Abh. Bd. 83 No. 6 (9.) (vgl. Abh. Bd. 76 p. 294) $q_\lambda^{(1)}$ in einer Ordnung unendlich $\geqq (n+1)\lambda$, und $q_{\lambda-\mathfrak{b}}^{(1)}$ in einer Ordnung, die um wenigstens $(n+1)\mathfrak{b}$ niedriger ist, als die von $q_\lambda^{(1)}$. Der charakteristische Index in $Q_\lambda^{(1)} = 0$ wird daher λ, und es kann sich aus

$$(31.) \qquad s^\lambda + q_1^{(1)} s^{\lambda-1} + \cdots + q_\lambda^{(1)}$$

keine Hauptpotenz mit einem Exponenten von $(x-a)^{-1}$, der $\leqq n$ ist, ergeben. Da der charakteristische Index in $Q_\lambda^{(1)} = 0$ gleich λ ist, so muss, wenn derselbe in $F_m = 0$ kleiner als m ist, in wenigstens einem Bestandtheile von $P_\varkappa$ $w_\iota - c_{-n}(x-a)^{-n} = 0$ sein. Und da $Q_\lambda^{(1)}$ keine Hauptpotenzen mit dem Exponenten von $(x-a)^{-1}$, der $\leqq n$ ist, enthält, so müssen diese Hauptpotenzen bei $F_m^{(1)}$ nach dem bei (30.) angegebenen Satze aus den Bestandtheilen von $P_\varkappa^{(1)}$ sich ergeben. Indem man nun das in *b*.) angegebene allgemeine Verfahren zur Herleitung der w von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ und der Eigenschaft, dass in $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index kleiner als m wird, anwendet, ergiebt sich, wenn in (16.) $Q_\lambda(s, x)$ keine Hauptpotenz enthält, dass dieses Verfahren gerade ***successive die einzelnen Summanden der in den Bestandtheilen von $P_\varkappa(y, x)$ vorkommenden Grössen w_ι liefert.***

Wenn eine Coefficientengleichung mehrfache Wurzeln enthält, so kann man nach bekannten Regeln der Algebra aus dem Gleichungspolynom diejenigen Polynome herleiten, von denen jedes unter einander verschiedene lineare Factoren enthält, und von denen das einzelne Polynom die linearen Factoren, die in dem ursprünglichen Gleichungspolynom gleich vielfach vorkommen, umfasst. Kommt nun bei denjenigen Grössen w_ι in $P_\varkappa$ die von einander verschieden sind, in den $\frac{dw_\iota}{dx}$ ein Werth des Exponenten $n+1$ der höchsten Potenzen nur in einem $\frac{dw_\iota}{dx}$ vor, so enthält die Coefficientenglei-

chung von F_m, die zu diesem Exponenten gehört, nur gleiche Wurzeln. Zur Bestimmung des Werthes derselben ist also eine Gleichung ersten Grades aufzustellen. Kommt derselbe Exponent $n+1$ der höchsten Potenzen in zwei $\frac{dw_\iota}{dx}$ vor, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten σ dieser Hauptpotenzen höchstens eine Gleichung zweiten Grades, u. s. w. Wenn ferner bei einem Werthe des Exponenten $n+1$ einer oder mehrerer höchster Potenzen in den $\frac{dw_\iota}{dx}$ ein Werth des Coefficienten $\sigma = -nc_{-n}$ nur in einem $\frac{dw_\iota}{dx}$ vorkommt, wo w_ι durch w'_ι bezeichnet sei, und man nun

$$e^{-c_{-n}(x-a)^{-n}} F_m(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}} y, x) = F_m^{(1)}(y, x)$$

bildet, so kommt in

$$e^{-c_n(x-a)^{-n}} P_x(e^{c_{-n}(x-a)^{-n}} y, x) = P_x^{(1)}$$

eine Hauptpotenz mit einem Exponenten, der $\leqq n$ ist, höchstens aus $\frac{dw'_\iota}{dx} + nc_{-n}(x-a)^{-(n+1)}$ vor, die Coefficientengleichung von $F_m^{(1)}$ zu dieser Hauptpotenz enthält gleiche Wurzeln; ebenso ist es bei den weiteren Reductionen, bis der charakteristische Index sich kleiner als m ergiebt. Daher werden die Coefficienten $c_{-\alpha}(\alpha = n-1, \ldots 1)$ in $w'_\iota - c_{-n}(x-a)^{-n}$ durch Gleichungen ersten Grades bestimmt, oder es werden einzelne gleich Null. Kommt bei einem und demselben Werthe des Exponenten $n+1$ mehrerer höchsten Potenzen ein Werth der Coefficienten σ dieser Potenzen in $\frac{dw'_\iota}{dx}$ und $\frac{dw''_\iota}{dx}$ vor, so werden aus den Bestandtheilen von $P_x^{(1)}$, welche w'_ι und w''_ι enthalten, successive die übrigen Coefficienten in w'_ι und w''_ι ermittelt. Die folgenden Coefficienten in w'_ι und w''_ι werden, solange sie gleich sind, durch Gleichungen ersten Grades, die ersten von einander verschiedenen durch zwei Gleichungen ersten Grades oder eine Gleichung zweiten Grades, die hierauf folgenden wieder durch Gleichungen ersten Grades bestimmt, oder einzelne Coefficienten werden gleich Null. Entsprechend ist es in anderen Fällen. *Man ersieht aus dem Vorstehenden, dass die Aufsuchung der Grössen w von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, so dass in $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index kleiner als m wird, meistens auf keine algebraischen Schwierigkeiten führt.*

8.

Es wird nun das allgemeine Verfahren entwickelt, aus einer homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $F_m(y, x) = 0$ mit rationalen Coefficienten den Differentialausdruck möglichst hoher Ordnung herzuleiten, der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, und gleich Null gesetzt eine Differentialgleichung liefert, deren Integrale in $F_m = 0$ enthalten sind.

a.) Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ sei durch das System

$$(1.)\qquad F_{m-k}(y, x) = s,\ f_k(s, x)$$

dargestellt, wo F_{m-k} ein homogener linearer Differentialausdruck $(m-k)^{\text{ter}}$, f_k ein solcher k^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 ist, so folgt daraus, dass $e^{-w}F_m(e^w y, x)$ gleich ist:

$$(2.)\qquad e^{-w}F_{m-k}(e^w y, x) = s',\ e^{-w}f_k(e^w s', x),$$

wo w gleich Null oder von der Form $\sum\limits_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ sei. Die Wurzeln der Exponentengleichung bei $x = a$ von $e^{-w}F_{m-k}(e^w y, x) = 0$ in der Anzahl $\geqq 0$, und die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w}f_k(e^w s, x) = 0$ in der Anzahl $\geqq 0$, nachdem zu letzteren eine ganze Zahl, die grösste der zu den Coefficienten von $e^w F_{m-k}(e^w y, x) = 0$ gehörenden Zahlen, addirt ist, sind zusammen die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ bei $x = a$. (Abh. Bd. 76 No. 3 p. 284; Abh. Bd. 83 No. 7 I; vgl. die vorliegende Abh. No. 9 III *a.*). Bei $x = \infty$ sei w gleich Null oder von der Form $\sum\limits_1^n c_a x^a$. Wird $x = t^{-1}$ gesetzt und

$$F_m(y, x) = (-t^2)^m F'_m(y, t),\quad F_{m-k}(y, x) = (-t^2)^{m-k}F'_{m-k}(y, t),$$
$$f_k(y, x) = (-t^2)^k f'_k(y, t)$$

und

$$t^{-2(m-k)}f'_k(t^{2(m-k)}\, y, t) = f''_k(y, t),$$

so erhält man $F'_m(y, t)$ ausgedrückt durch das System

$$(3.)\qquad F'_{m-k}(y, t) = s,\quad f''_k(s, t);$$

daher, wenn $w(t^{-1}) = w'$ gesetzt wird, so ergiebt sich

$$(4.)\qquad e^{-w}F_m(e^w y, x) = (-t^2)^m e^{-w'}F'_m(e^{w'} y, t)$$

und für $e^{-w'}F'_m(e^{w'} y, t)$ das System

$$(5.)\qquad e^{-w'}F'_{m-k}(e^{w'} y, t) = s',\quad e^{-w'}f''_k(e^{w'} s', t).$$

Die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w'}f_k''(e^{w'}s,t)=0$ bei $t=0$ sind die der Exponentengleichung von $e^{-w}f_k'(e^{w'}s,t)=0$, nachdem zu letzteren eine ganze Zahl $-2(m-k)$ addirt ist. Daher sind die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w'}F'_{m-k}(e^{w'}y,t)=0$ bei $t=0$ und die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w'}f_k'(e^{w'}s,t)=0$, nachdem zu letzteren eine ganze Zahl addirt ist, zusammen die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w'}F'_m(e^{w'}y,t)=0$ bei $t=0$.

Wenn also der Differentialausdruck $F_m(y,x)$ durch ein System von homogenen linearen Differentialausdrücken mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 dargestellt ist, so sind die Grössen w, welche von der Form $\sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ oder gleich Null bei einem beliebigen Punkte $x=a$ und der Form $\sum_1^n c_a x^a$ oder gleich Null bei $x=\infty$ sind und welche bewirken, dass bei wenigstens einem der Bestandtheile $f(y,x)$ des Systemes die Differentialgleichung $e^{-w}f(e^w y,x)=0$ den charakteristischen Index bei diesem Punkte kleiner als die Ordnung hat (bei $x=\infty$ nach Substitution von $x=t^{-1}$ bei $t=0$) diejenigen, die dasselbe in Bezug auf $e^{-w}F_m(e^w y,x)=0$ bei diesem Punkte bewirken, und die Wurzeln sämmtlicher Exponentengleichungen bei demselben Punkte, die bei einer Grösse w zu allen Bestandtheilen $e^{-w}f(e^w y,x)$ gehören, lassen sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w}F_m(e^w y,x)=0$ so paaren, dass die in einem Paare stehenden sich um eine ganze Zahl unterscheiden.

Wenn W eine rationale Function und $\Psi(y,x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 ist, so sind bei einem beliebigen Punkte der charakteristische Index und die Wurzeln der Exponentengleichung in $e^{-W}\Psi(e^W y,x)=0$ und in $e^{-w}\Psi(e^w y,x)=0$ übereinstimmend, und ist der Punkt in der einen Differentialgleichung nichtsingulär, so auch in der anderen, wenn w der Theil der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function W ist, dessen Glieder in diesem Punkte unendlich werden, und w gleich Null ist, wenn W in diesem Punkte nicht unendlich wird (bei $x=\infty$ tritt $x=t^{-1}$, $t=0$ ein). Denn e^{W-w} bleibt in diesem Punkte einwerthig und stetig und von Null verschieden.

b.) Jeder homogene lineare Differentialausdruck m^{ter} Ordnung $F_m(y,x)$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 hat die Darstellung durch das System

$$(6.)\qquad \Phi_N(y, x) = s,\ F_{m-N}(s, x),$$

wo Φ_N ein homogener linearer Differentialausdruck N^{ter} Ordnung ist, N entweder gleich Null, oder wenn $N > 0$ ist, so soll Φ_N durch ein System normaler Differentialausdrücke sich darstellen lassen; F_{m-N} ist ein homogener linearer Differentialausdruck $(m-N)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 und $m-N$ entweder gleich Null, oder wenn $m-N > 0$ ist, so soll F_{m-N} so beschaffen sein, dass $F_{m-N}(s, x) = 0$ nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung enthält, in welcher ein normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt ist. Es giebt nur ***einen*** Differentialausdruck $\Phi_N(y, x)$ dieser Art (Abh. Bd. 83 No. 4) und daher auch nur ***einen*** Differentialausdruck $F_{m-N}(y, x)$ (l. c. No. 2 II). ***Φ_N kann nun unter folgender Form dargestellt werden.*** In $F_m(y, x) = 0$ seien die Integrale einer oder mehrerer Differentialgleichungen enthalten, in denen normale Differentialausdrücke mit demselben determinirenden Factor gleich Null gesetzt sind. Werden die linearunabhängigen Integrale je zweier dieser Differentialgleichungen in einer Differentialgleichung vereinigt, so ist in dieser ein normaler Differentialausdruck mit demselben determinirenden Factor gleich Null gesetzt. Es giebt demnach nur ***eine*** Differentialgleichung von höchster Ordnung, in der ein normaler Ausdruck mit jenem determinirenden Factor gleich Null gesetzt ist, deren Integrale $F_m(y, x) = 0$ erfüllen, und diese muss die Integrale aller anderen Differentialgleichungen derselben Art von niedrigeren Ordnungen enthalten. Alle solche Differentialgleichungen mit verschiedenen determinirenden Factoren und jede von höchster Ordnung im Vergleich mit solchen, die denselben determinirenden Factor enthalten, seien aus $F_m = 0$ herausgenommen; die Integrale derselben sind linearunabhängig (Abh. Bd. 83 No. 3 III oder No. 7 IV *c*.). Diese Integrale seien in einer Differentialgleichung $F_{(1)}(y, x) = 0$ vereinigt; der Differentialausdruck $F_{(1)}(y, x)$ nimmt die Form eines Systemes von Differentialausdrücken an, von dem jeder Bestandtheil ein System normaler Ausdrücke bildet, welches ähnlich ist dem Systeme in je einer jener Differentialgleichungen. (Abh. Bd. 83 No. 7 IV *a*.), vgl. die vorliegende Abh. No. 6 II *a*.)). Alsdann wird $F_m(y, x)$ auf die Form

$$(7.)\qquad F_{(1)}(y, x) = y_1,\quad F_{m'}(y_1, x)$$

gebracht. Nun wird $F_{m'}(y, x)$ in derselben Weise zerlegt und unter der Form dargestellt

$$(8.)\qquad F_{(2)}(y, x) = y_2,\quad F_{m''}(y_2, x),$$

22*

wo der homogene lineare Differentialausdruck $F_{(2)}(y, x)$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 dadurch definirt ist, dass $F_{(2)}(y, x) = 0$ die Integrale aller Differentialgleichungen vereinigt enthält, in denen normale Ausdrücke mit verschiedenen determinirenden Factoren gleich Null gesetzt sind, und von denen jede die der höchsten Ordnung von denjenigen ist, die normale Ausdrücke mit demselben determinirenden Factor enthalten und deren Integrale $F_{m'}(y, x) = 0$ erfüllen. Indem diese Zerlegung auf $F_{m''}(y, x)$ angewandt wird, ergiebt sich ein entsprechender Differentialausdruck $F_{(3)}(y, x)$, und indem dieses Verfahren fortgesetzt wird, erhält man schliesslich für den Differentialausdruck $F_m(y, x)$ die Darstellung

(9.) $F_{(1)}(y, x) = y_1,\ F_{(2)}(y_1, x) = y_2,\ \dots\ F_{(\nu)}(y_{\nu-1}, x) = s,\ F_{m-N}(s, x) = F_m(y, x),$

wo die Differentialausdrücke $F_{(1)}$, $F_{(2)}$ bis $F_{(\nu)}$ in der vorhin angegebenen Weise entstehen, das System derselben einen Ausdruck N^{ter} Ordnung bildet, in welchem N auch Null sein kann, wobei sich das System auf y reducirt, $F_{m-N}(s, x)$ der homogene lineare Differentialausdruck $(m-N)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 aus (6.) ist, in welchem $m-N$ auch Null sein kann, wo sich dieser Ausdruck auf s reducirt. Aus der Entstehung der Differentialausdrücke $F_{(1)}$, $F_{(2)}$, etc. ergiebt sich, dass $F_m(y, x)$ die Form (9.) nur auf *eine* Weise annehmen kann. Die Form (9.) werde daher *die canonische Form des Differentialausdruckes* $F_m(y, x)$ genannt. Die in Abh. Bd. 83 No. 10 und 11 und nur dort gebrauchte und in anderem Sinne genommene Benennung von Darstellungen von $\Phi_N(y, x)$ als canonischen wird demnach hier nicht weiter angewandt. Wenn in der Form (9.) $m-N = 0$ ist, so möge die canonische Form eine *normale*, und wenn $m-N > 0$ ist, eine *nichtnormale* heissen. Die Differentialausdrücke $F_{(1)}$, $F_{(2)}$ bis F_{m-N} werden der erste, zweite bis letzte *canonische Bestandtheil* von $F_m(y, x)$, die Differentialausdrücke $F_{(1)}$ bis $F_{(\nu)}$ die *normalen canonischen Bestandtheile*, der Differentialausdruck F_{m-N} der *nichtnormale canonische Bestandtheil* genannt.

c.) Es soll jetzt das Verfahren dargestellt werden, die canonischen Bestandtheile von $F_m(y, x)$ successive dadurch herzuleiten, dass die normalen Differentialausdrücke ermittelt werden, die gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, deren Integrale in der Differentialgleichung vereinigt sind, die aus je einem gleich Null gesetzten normalen canonischen Bestandtheile hervorgeht.

Zuerst werden die singulären Punkte von $F_m = 0$ festgestellt. Der gemeinschaftliche Factor in Zähler und Nenner bei jedem rationalen Coefficienten in $F_m(y, x)$ sei weggehoben. Dann werden nach bekannten Regeln der Algebra aus dem Polynom des Nenners diejenigen Polynome hergeleitet, von denen jedes unter einander verschiedene lineare Factoren enthält, und von denen das einzelne Polynom die linearen Factoren, die in dem Nenner gleich vielfach vorkommen, umfasst. Aus diesen bei den verschiedenen Coefficienten von $F_m = 0$ erhaltenen Polynomen werden alle diejenigen, welche die unter einander verschiedenen linearen Factoren enthalten, hergeleitet. Dieselben, gleich Null gesetzt, liefern die Gleichungen, deren Wurzeln die singulären Punkte im Endlichen bestimmen. Bei $x = \infty$ ist $x = t^{-1}$ zu setzen und zu sehen, ob $t = 0$ singulärer Punkt ist.

Alsdann werden *bei jedem singulären Punkte $x = a$ von $F_m(y, x) = 0$* die Grössen w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, letztere Grössen mittels des in No. 7 III *b.*) gegebenen Verfahrens ermittelt, die so beschaffen sind, dass in $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index bei diesem Punkte kleiner als m ist, und es werden bei jeder Grösse w die Wurzeln der Exponentengleichung von $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ bei demselben Punkte aufgestellt. *Bei dem Punkte $x = \infty$, wenn derselbe in $F_m = 0$ singulär ist,* werden die Grössen w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_\alpha x^\alpha$ ermittelt, so beschaffen, dass in $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ für $x = t^{-1}$ bei $t = 0$ der charakteristische Index kleiner als m wird, und es werden bei jedem w die Wurzeln der Exponentengleichung dieser Differentialgleichung bei $t = 0$ aufgestellt. Diese Grössen e^w werden die *fundamentalen determinirenden Factoren bei den singulären Punkten von $F_m = 0$* genannt. Die zu $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ gehörende Exponentengleichung werde die zu dem fundamentalen determinirenden Factor gehörende *fundamentale Exponentengleichung* genannt. *Die Anzahl der Wurzeln sämmtlicher fundamentalen Exponentengleichungen bei demselben singulären Punkte ist $\leqq m$* (No. 7 III *b.*)). Die Grössen w in den fundamentalen determinirenden Factoren werden nach No. 7 III *b.*) auf algebraische Weise aus den Coefficienten der Differentialgleichung hergeleitet. Die Coefficienten in den fundamentalen Exponentengleichungen hängen daher auch *algebraisch mit den Coefficienten der Differentialgleichung* zusammen.

Ist $F_{m-k}(y, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten

Ableitung gleich 1 so beschaffen, dass die Integrale von $F_{m-k} = 0$ in $F_m = 0$ enthalten sind, so hat $F_m(y, x)$ die Darstellung

$$(10.) \qquad F_{m-k}(y, x) = s, \quad f_k(s, x),$$

wo $f_k(s, x)$ ein homogener linearer Differentialausdruck k^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 ist. (Vgl. Abh. Bd. 83 No. 2 II).

Der Differentialausdruck $F_{m-k}(y, x)$ in (10.) sei nun ein *normaler* gleich $e^W \bar{F}_{m-k}(e^{-W}y, x)$, e^W der determinirende Factor, $\bar{F}_{m-k}(\bar{y}, x)$ der reguläre Differentialausdruck in dem normalen. W sei in Partialbrüche zerlegt; der Theil von W, dessen Glieder in einem Punkte unendlich werden, sei bei einem beliebigen Punkte durch w bezeichnet, wo $w = 0$ ist, wenn W in diesem Punkte nicht unendlich wird, und es werde e^w gebildet. Nach *a.*) ergiebt sich, *dass die Grösse e^w bei einem nichtsingulären Punkte von $F_m = 0$ gleich Eins ist, und dass die Grösse e^w bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ unter den fundamentalen determinirenden Factoren vorkommt, und die Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{F}_{m-k} = 0$ bei diesem Punkte sich mit ebenso vielen Wurzeln der zu e^w gehörenden fundamentalen Exponentengleichung so paaren lassen, dass die in einem Paare stehenden sich um eine ganze Zahl unterscheiden.*

Um nun einen solchen normalen Ausdruck $F_{m-k}(y, x)$ aufzusuchen, wird aus den fundamentalen determinirenden Factoren einer bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ herausgenommen, aus diesen wird das Product e^W gebildet. Dann wird $e^{-W}F_m(e^W y, x)$ aufgestellt.

Es ist jetzt zuzusehen, ob in $e^{-W}F_m(e^W y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $\bar{F}_{m-k}(y, x) = 0$ enthalten sind, wo $\bar{F}_{m-k}(y, x)$ ein regulärer Differentialausdruck $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Dieses geschieht nach dem in Abh. Bd. 83 No. 5 gegebenen Verfahren mit Hinzunahme der in dieser Abhandlung No. 7 II angegebenen wesentlichen Vereinfachung, wonach man, ohne die algebraische Gleichung $\Phi(x) = 0$ aufzulösen, deren Wurzeln die in $\bar{F}_{m-k} = 0$ etwa neu hinzutretenden singulären Punkte im Endlichen liefern, im Stande ist zu prüfen, ob ein Differentialausdruck $\bar{F}_{m-k}(y, x)$ mit den verlangten Eigenschaften existirt. Wenn bei *dem angenommenen Werthe von* W ein solcher Differentialausdruck F_{m-k} existiren soll, so müssen sich aus den Wurzeln der Exponentengleichungen von $e^{-W}F_m(e^W y, x) = 0$ bei den singulären Punkten von $F_m = 0$ je $m-k$ als Wurzeln der Exponenten-

gleichungen von $\bar{F}_{m-k}=0$ herausnehmen lassen, so dass mittels aller dieser Wurzeln der in Abh. Bd. 83 No. 5 (19.) angegebene Ausdruck für die positive ganze Zahl τ ($\geqq 0$), den Grad von $\Phi(x)$, gebildet werden kann. Der höchste charakteristische Index in $e^{-W}F_m(e^W y, x)=0$ sei H. Dann kann der reguläre Differentialausdruck $\bar{F}_{m-k}(y,x)$ höchstens von $(m-H)^{\text{ter}}$ Ordnung sein. Es soll nun bei einem angenommenen Werthe W derjenige reguläre Ausdruck $\bar{F}_{m-k}$ von der verlangten Eigenschaft genommen werden, welcher von allen etwa existirenden die *höchste* Ordnung hat. Es kann nur *einen* solchen geben.

Nun sei ein solcher normaler Differentialausdruck $\Phi^{(1)}(y,x)$ mit dem determinirenden Factor $e^{W^{(1)}}$ und dem regulären Differentialausdruck $\bar{\Phi}^{(1)}(y,x)$ gefunden, so dass also die Integrale von $\Phi^{(1)}=0$ in $F_m=0$ enthalten sind. *Dann werden bei jedem singulären Punkte von $F_m=0$, so viele Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichung, die zu dem fundamentalen determinirenden Factor in $e^{W^{(1)}}$ gehört, gestrichen, als sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{\Phi}^{(1)}=0$ bei demselben Punkte paaren lassen, so dass die in einem Paare stehenden sich um eine ganze Zahl unterscheiden.*

Es ist nun zu ermitteln, ob ein zweiter normaler Differentialausdruck $\Phi^{(2)}(y,x)$ mit einem von dem vorigen verschiedenen determinirenden Factor $e^{W^{(2)}}$ und dem regulären Ausdrucke $\bar{\Phi}^{(2)}(y,x)$ besteht, so beschaffen, dass die Integrale von $\Phi^{(2)}(y,x)=0$ in $F_m=0$ enthalten sind. Wenn ein solcher besteht, so lassen sich die Integrale von $\Phi^{(1)}=0$ und $\Phi^{(2)}=0$ in einer Differentialgleichung vereinigen, welche die Form erhält

$$(11.) \qquad \Phi^{(1)}(y,x)=y_1, \quad \varphi^{(2)}(y_1,x)=0,$$

wo $\varphi^{(2)}(y,x)$ durch ein System normaler Ausdrücke darstellbar ist, welches ähnlich ist dem System, das $\Phi^{(2)}$ ausdrückt (vgl. *b.*)). Der Theil der in Partialbrüche zerlegten rationalen Function $W^{(2)}$, dessen Glieder in einem Punkte unendlich werden, sei durch w bezeichnet, wo w gleich Null ist, wenn $W^{(2)}$ in diesem Punkte nicht unendlich wird. Nach *a.*) ergiebt sich wenn F_{m-k} in (10.) dem Systeme in (11.) gleich gesetzt wird, *dass die Grösse e^w in $e^{W^{(2)}}$ bei einem nichtsingulären Punkte von $F_m=0$ gleich Eins ist, und dass die Grösse e^w in $e^{W^{(2)}}$ bei einem singulären Punkte von $F_m=0$ unter den fundamentalen determinirenden Factoren vorkommt und die Wurzeln der Exponentengleichung von $\bar{\Phi}^{(2)}=0$ bei diesem Punkte sich mit ebenso vielen der übrig gebliebenen Wurzeln der zu e^w gehörenden fundamentalen Exponenten-*

gleichung so paaren lassen, dass die in einem Paare stehenden sich um eine ganze Zahl unterscheiden.

Dieser zweite normale Differentialausdruck $\Phi^{(2)}$ wird nun wieder unmittelbar aus der Differentialgleichung $F_m = 0$ gesucht. Es wird aus den fundamentalen determinirenden Factoren von $F_m = 0$, bei denen Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichung übrig geblieben sind, einer bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ herausgenommen und zwar so, dass deren Product $e^{W^{(2)}}$ von $e^{W^{(1)}}$ verschieden ist. Dann ist zuzusehen, ob in $e^{-W^{(2)}} F_m(e^{W^{(2)}} y, x) = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung $\overline{F}_{m-k}(y, x) = 0$ enthalten sind, wo $\overline{F}_{m-k}$ ein regulärer Differentialausdruck $(m-k)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Hier können nun die Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{F}_{m-k} = 0$ bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ nur solche $m-k$ Wurzeln aus der Exponentengleichung von $e^{-W^{(2)}} F_m(e^{W^{(2)}} y, x) = 0$ sein, welche sich mit ebenso vielen der übriggebliebenen Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichung, die zu dem fundamentalen determinirenden Factor in $e^{W^{(2)}}$ gehört, so paaren lassen, dass die in einem Paare stehenden sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Das weitere Verfahren ist das oben bezeichnete. Es ist bei einem Werthe $W^{(2)}$ derjenige reguläre Ausdruck $\overline{F}_{m-k}$ von der verlangten Eigenschaft zu nehmen, welcher von allen etwa existirenden die höchste Ordnung hat.

Wenn nun ein zweiter solcher normaler Differentialausdruck $\Phi^{(2)}(y, x)$ mit dem determinirenden Factor $e^{W^{(2)}}$ und dem regulären Differentialausdruck $\overline{\Phi}^{(2)}(y, x)$ sich gefunden hat, ***so werden wiederum bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$, so viele der früher übrig gebliebenen Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichung, die zu dem fundamentalen determinirenden Factor in $e^{W^{(2)}}$ gehört, gestrichen, als sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\Phi}^{(2)} = 0$ bei demselben Punkte so paaren lassen, dass die in einem Paare stehenden sich um eine ganze Zahl unterscheiden.*** In derselben Weise kann man zusehen, ob ein dritter normaler Differentialausdruck $\Phi^{(3)}(y, x)$ mit einem determinirenden Factor, der von denen in $\Phi^{(1)}$ und $\Phi^{(2)}$ verschieden ist, besteht, so dass die Integrale von $\Phi^{(3)}(y, x) = 0$ in $F_m = 0$ enthalten sind. Betrachtet man die Differentialgleichung, in welcher die Integrale von $\Phi^{(1)} = 0$, $\Phi^{(2)} = 0$ und $\Phi^{(3)} = 0$ vereinigt sind

$$\text{(12.)} \qquad \Phi^{(1)}(y, x) = y_1, \quad \varphi^{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \varphi^{(3)}(y_2, x) = 0,$$

wo $\varphi^{(2)}$ aus (11.) hervorgeht, so ergiebt sich, dass zur Aufsuchung von $\Phi^{(3)}$ nur die zuletzt übrig gebliebenen fundamentalen determinirenden Factoren mit den übrig gebliebenen Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen in Betracht kommen. $\Phi^{(3)} = 0$ ist dann aus $F_m = 0$ nach dem früheren Verfahren zu suchen, und wenn ein solcher Ausdruck $\Phi^{(3)}$ besteht und $\overline{\Phi}^{(3)}$ der reguläre Ausdruck ist, so sind wieder so viele der übrig gebliebenen Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen, die zu den fundamentalen determinirenden Factoren von $F_m = 0$ in $\Phi^{(3)}$ gehören, zu streichen, als sich mit den Wurzeln der Exponentengleichung von $\overline{\Phi}^{(3)} = 0$ paaren lassen, so dass die in einem Paare stehenden sich um eine ganze Zahl unterscheiden.

Es seien nun alle normalen Differentialausdrücke mit verschiedenen determinirenden Factoren gefunden, die gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, deren Integrale in $F_m = 0$ enthalten sind und von denen jeder unter allen solchen mit demselben determinirenden Factor die höchste Ordnung hat. Ist die Summe ihrer Ordnungen gleich m, so bilden ihre Integrale ein System linearunabhängiger Integrale von $F_m = 0$ (vgl. *b.*)). Ist diese Summe kleiner als m, so werden die Integrale in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt (vgl. *b.*)) $F_{(1)}(y, x) = 0$; dieselbe enthält rationale Coefficienten, der Coefficient der höchsten Ableitung wird gleich 1 gesetzt. Alsdann wird $F_m(y, x)$ dargestellt durch

$$(13.) \qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{m'}(y_1, x),$$

wo $F_{m'}$ ein homogener linearer Ausdruck m'^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 ist. Die fundamentalen determinirenden Factoren von $F_m = 0$, bei denen Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen übrig geblieben waren, sind nach *a.*) und *b.*) die fundamentalen determinirenden Factoren von $F_{m'} = 0$ bei diesem Punkte, wenn er in $F_{m'} = 0$ singulär ist, und die übrig gebliebenen Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen von $F_m = 0$ lassen sich mit den Wurzeln der entsprechenden fundamentalen Exponentengleichungen von $F_{m'} = 0$ bei diesem Punkte so paaren, dass die in einem Paare stehenden sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Hiernach sind die Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen von $F_{m'} = 0$ zu bestimmen bei denjenigen der genannten Punkte, die in $F_{m'} = 0$ noch singulär sind.

Nun können aber in $F_{m'} = 0$ neue singuläre Punkte auftreten. Da bei diesen Punkten der charakteristische Index in $F_m = 0$ gleich Null ist,

so muss er auch in $F_{(1)}=0$ und $F_{m'}=0$ gleich Null sein. Die Integrale von $F_m=0$ sind bei einem solchen Punkte einwerthig und stetig, daher auch die von $F_{(1)}=0$. Wenn letztere successive in ein System von linear-unabhängigen Integralen von $F_m=0$ eingeführt werden, so dass man ein System von solchen Integralen erhält, welches die von $F_{(1)}=0$ umfasst, und man die m' übrigen in $F_{(1)}(y,x)=y_1$ einsetzt, so erhält man für y_1 m' linearunabhängige, bei dem betrachteten Punkte einwerthige Functionen. Daher sind die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_{m'}=0$ bei diesem Punkte *ganzzahlig*.

Es sind nun die im Endlichen liegenden neu hinzugetretenen singulären Punkte von $F_{m'}=0$ aufzusuchen. Ein solcher Punkt ist gemäss (13.) auch in $F_{(1)}=0$ singulär und hier ein ausserwesentlich singulärer Punkt. Derselbe sei $x=a$. $F_{(1)}$ ist von der Ordnung $m-m'$, der Coefficient von $\frac{d^{m-m'-\alpha}y}{dx^{m-m'-\alpha}}$ in $F_{(1)}$ sei q_α. q_1 hat nun bei $x=a$ eine Entwickelung von der Form $\frac{\alpha}{x-a}+\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$, wo α eine negative ganze Zahl ist (vgl. Abh. Bd. 81 No. 1). Wenn man daher, nachdem die gemeinschaftlichen Factoren in Zähler und Nenner in q_1 weggehoben sind, nach bekannten Regeln der Algebra das Polynom bildet, welches die von einander verschiedenen linearen Factoren des Nenners einfach enthält, und wenn das Polynom, welches nur von einander verschiedene lineare Factoren und als Constante in denselben die Ausdrücke der im Endlichen liegenden singulären Punkte von $F_m=0$ enthält, durch $\varphi(x)$ bezeichnet wird, so ist der grösste gemeinschaftliche Factor zwischen $\varphi(x)$ und dem früher genannten Polynom zu bilden und letzteres durch denselben zu dividiren; alsdann erhält man ein Polynom $\chi(x)$ so beschaffen, dass die Gleichung $\chi(x)=0$ einfache Wurzeln enthält, welche die neu hinzugetretenen singulären Punkte von $F_{m'}=0$ im Endlichen sind. Diese Gleichung $\chi(x)$ ist aufzulösen. In Betreff des Gleichungspolynoms $\chi(x)$ ergiebt sich aber Folgendes. Bei dem nichtsingulären Punkte $x=a$ von $F_m=0$ sind die Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m=0$ 0, 1 bis $m-1$. Da dieser Punkt in $F_{(1)}=0$ ausserwesentlich singulär ist und $F_{(1)}$ von der Ordnung $m-m'$, so enthält die Exponentengleichung von $F_{(1)}=0$ bei diesem Punkte $m-m'$ verschiedene Wurzeln aus der Reihe 0, 1 bis $m-1$, die nicht mit 0, 1 bis $m-m'-1$ zusammenfallen (vgl. Abh. Bd. 81 No. 1). Die Exponentengleichung von $F_{m'}=0$ enthält die übrigen m', zu denen $-(m-m')$ addirt ist (vgl. *a.*); der Coefficient von $\frac{d^{m'-\alpha}y}{dx^{m'-\alpha}}$ in $F_{m'}=0$ sei durch g_α be-

zeichnet. Nun ist die Exponentengleichung von $F_{(1)} = 0$

$$(14.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-(m-m')+1)+(q_1(x-a))_{x=a}r(r-1)\dots(r-(m-m')+2)+\cdots \\ \qquad\qquad\cdots+(q_{m-m'}(x-a)^{m-m'})_{x=a}=0. \end{cases}$$

Die Exponentengleichung von $F_{m'} = 0$ ist

$$(15.)\quad \begin{cases} r(r-1)\dots(r-m'+1)+(g_1(x-a))_{x=a}r(r-1)\dots(r-m'+2)+\cdots \\ \qquad\qquad\cdots+(g_{m'}(x-a)^{m'})_{x=a}=0. \end{cases}$$

Es ergiebt sich hieraus, wenn unter den Wurzeln von Gl. (14.) $0, 1\dots l$, aber nicht $l+1$ ist, wo $l < m-m'-1$, so ist

$$(16.)\quad \begin{cases} (q_{m-m'}(x-a)^{m-m'})_{x=a}=0, \quad (q_{m-m'-1}(x-a)^{m-m'-1})_{x=a}=0, \quad \dots \\ (q_{m-m'-l}(x-a)^{m-m'-l})_{x=a}=0, \quad (q_{m-m'-l-1}(x-a)^{m-m'-l-1})_{x=a} \gtrless 0. \end{cases}$$

Und wenn unter den Wurzeln der Gl. (15.) $m-m'-(m-m')=0,\ 1\dots l'$, aber nicht $l'+1$ ist, wo $l' < m'-1$, so ist

$$(17.)\quad \begin{cases} (g_{m'}(x-a)^{m'})_{x=a}=0, \quad (g_{m'-1}(x-a)^{m'-1})_{x=a}=0, \quad \dots \\ (g_{m'-l'}(x-a)^{m'-l'})_{x=a}=0, \quad (g_{m'-l'-1}(x-a)^{m'-l'-1})_{x=a} \gtrless 0. \end{cases}$$

In jedem Coefficienten $q_\alpha(\alpha=2\dots m-m')$ und $g_\alpha(\alpha=2\dots m')$ seien die gemeinschaftlichen Factoren von Zähler und Nenner weggehoben; das Polynom des Nenners bei q_s oder g_s enthält dann den Factor $(x-a)^\varepsilon$, wo ε eine der Zahlen 0, 1 bis s sein kann. Aus den Relationen (16.), (17.) ergiebt sich nun, dass die verschiedenen linearen Factoren $x-a$, die sich auf die verschiedenen neu hinzugetretenen singulären Punkte beziehen, allgemein genommen bei einigen Coefficienten q oder g theilweise mit verschiedenen Exponenten ε in dem Nenner eines solchen Coefficienten vorkommen werden. Aus dem Polynom N des Nenners jedes Coefficienten q_α $(\alpha=2\dots m-m')$, g_α $(\alpha=2\dots m')$ werden daher nach bekannten Regeln der Algebra die Polynome hergeleitet, von denen jedes nur unter einander verschiedene lineare Factoren umfasst, welche Polynome, gleich Null gesetzt, Gleichungen liefern, von denen die einzelne die Wurzeln von $N=0$, die gleich vielfach vorkommen, enthält. Diese Polynome sind durch den grössten gemeinschaftlichen Factor, den jedes mit dem oben bezeichneten Polynom $\varphi(x)$ hat, zu theilen; dann enthalten die Quotienten als lineare Factoren nur solche von $\chi(x)$, und es werden sich unter denselben allgemein genommen *Polynome, welche Theiler von $\chi(x)$ sind,* finden. Nun werden die unter einander verschiedenen Theiler genommen und $\chi(x)$ successive in Factoren zerlegt, indem zwischen den ein-

zelnen bereits gefundenen Factoren, deren Product $\chi(x)$ ist, und einem neuen Theiler von $\chi(x)$ der grösste gemeinschaftliche Factor gesucht wird. Alsdann sind noch die zuletzt übrig bleibenden Factoren gleich Null zu setzen, und die erhaltenen Gleichungen aufzulösen.

Ist nur *ein* fundamentaler determinirender Factor e^w bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ übrig geblieben, und ist die Anzahl der übrig gebliebenen Wurzeln der zugehörigen fundamentalen Exponentengleichung gleich m', so ist in $e^{-w} F_{m'}(e^w y, x) = 0$ der charakteristische Index bei diesem Punkte gleich Null, $F_{m'}(y, x)$ ist ein normaler Differentialausdruck, bei welchem der determinirende Factor aus dem Product der übrig gebliebenen fundamentalen determinirenden Factoren von $F_m = 0$ besteht, und man braucht daher in diesem Falle die neu hinzugetretenen singulären Punkte von $F_{m'} = 0$ nicht aufzusuchen.

Nachdem nun die singulären Punkte von $F_{m'} = 0$ bekannt sind und bei jedem singulären Punkte die fundamentalen determinirenden Factoren und die Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen dieser Differentialgleichung aufgestellt sind, wird auf $F_{m'} = 0$ dasselbe Verfahren angewandt, welches früher auf $F_m = 0$ angewandt worden ist. Dieses Verfahren ist fortzusetzen, so lange Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen von $F_m = 0$ bei allen singulären Punkten noch übrig sind, bis man entweder auf einen Differentialausdruck stösst, der gleich Null gesetzt eine Differentialgleichung ergiebt, die nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdruck enthält; dieser ist dann der nichtnormale canonische Bestandtheil von $F_m(y, x)$, als solcher kann sich auch $F_m(y, x)$ selbst ergeben; oder bis man $F_m(y, x)$ vollständig in normale canonische Bestandtheile aufgelöst hat.

Bei Anwendung des Verfahrens von No. 7 II ist zu beachten, wenn $F_m = 0$ einen solchen im Endlichen oder Unendlichen liegenden singulären Punkt hat, dass die Wurzeln jeder fundamentalen Exponentengleichung bei diesem Punkte (diese Gleichung für sich betrachtet) zu je zweien sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, so kann man, um die normalen Bestandtheile von F_m in beliebiger Reihenfolge aufzusuchen, alle formellen Entwickelungen der Integrale, die bei dem Verfahren von No. 7 II erforderlich sind, bei diesem Punkte vornehmen, und *man weiss von vorn herein*, dass man auf keine unbestimmten Constanten innerhalb der Entwickelungen stösst.

9.

Nachdem in den beiden letzten Nummern das allgemeine Verfahren angegeben ist, einen homogenen linearen Differentialausdruck F_m mit rationalen Coefficienten durch ein System solcher Ausdrücke darzustellen, an dessen Spitze das System möglichst hoher Ordnung von normalen Ausdrücken steht, werden nunmehr die Resultate der vorhergehenden Nummern zur Untersuchung der Integrale von $F_m = 0$ angewandt.

Der homogene lineare Differentialausdruck m^{ter} Ordnung $F_m(y, x)$ mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 sei nach dem in No. 8 *c.*) angegebenen Verfahren auf die canonische Form (No. 8 *b.*) gebracht. Dann sind nach diesem Verfahren gleichzeitig die Differentialgleichungen mit normalen Differentialausdrücken ermittelt, deren Integrale in einer Differentialgleichung vereinigt sind, die zum Differentialausdruck je einen der normalen canonischen Bestandtheile von $F_m(y, x)$ hat. Wird ein System linearunabhängiger Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten durch die Integrale mehrerer homogener linearer Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, deren Integrale unter einander linearunabhängig sein sollen, dargestellt, so werde von letzteren Differentialgleichungen gesagt, dass sie *ein System von Unterdifferentialgleichungen* der ursprünglichen Differentialgleichung bilden. Ein System von Unterdifferentialgleichungen, in welchem die Differentialgleichungen normale Differentialausdrücke mit von einander verschiedenen determinirenden Factoren enthalten, kann nur auf *eine* Weise bestehen, weil sonst die ursprüngliche Differentialgleichung mehr linearunabhängige Integrale enthielte, als ihre Ordnung beträgt, da die Integrale von Differentialgleichungen mit normalen Differentialausdrücken und von einander verschiedenen determinirenden Factoren unter einander linearunabhängig sind (vgl. No. 8 *b.*)). Besteht ein System von Unterdifferentialgleichungen dieser Art, so mögen die Unterdifferentialgleichungen dieses Systems *Hauptunterdifferentialgleichungen* der ursprünglichen Differentialgleichung heissen. Es sind also nach No. 8 *c.*) die Hauptunterdifferentialgleichungen jeder Differentialgleichung bekannt, in welcher ein normaler canonischer Bestandtheil von $F_m(y, x)$ gleich Null gesetzt ist.

I. *Die canonische Form von $F_m(y, x)$ bestehe in einem normalen canonischen Bestandtheile.* Die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ besitzt dann

ein System von Hauptunterdifferentialgleichungen, die ermittelt sind. Das Integral einer der letzteren Differentialgleichungen besteht aus dem determinirenden Factor e^W, der bekannt ist, multiplicirt mit dem Integrale der Differentialgleichung, in welcher der reguläre Differentialausdruck aus jener gleich Null gesetzt ist. Was diese Differentialgleichung mit nur regulären Integralen angeht, so können in derselben neben den singulären Punkten von $F_m = 0$ noch neue singuläre vorhanden sein. Es sind dieses ausserwesentlich singuläre Punkte der Differentialgleichung. Dieselben brauchte man bei Herleitung dieser Differentialgleichung nach No. 8 *c.*) nicht aufzusuchen, und man braucht sie auch zu dem Zwecke, die Integrale der Differentialgleichung zu entwickeln und ihren Verlauf zu verfolgen, nicht zu ermitteln. Die Entwickelung der Integrale dieser Differentialgleichung bei den singulären Punkten von $F_m = 0$, bei diesen sind die Wurzeln der Exponentengleichungen bereits bekannt, geschieht bei $x = a$ nach No. 1 (7.) (8.) und (19.), die Constanten in dem linearen Ausdruck der Integrale, der das Resultat des Umganges eines Integrales um einen singulären Punkt darstellt, werden durch No. 1 (24.) gegeben. Die Darstellung der Functionen $\chi_{ab}(x)$ in No. 1 (19.) in dem Bezirke des singulären Punktes erfolgt mittels der in No. 3 III betrachteten Differentialgleichung $T_\varrho = 0$ nach Abh. Bd. 87 No. 7 II. *b.*). Die Werthe der Integrale und des Productes eines Integrales mit dem determinirenden Factor werden mit vorgeschriebener Annäherung in einem Kreisringe innerhalb dieses Bezirkes mit dem singulären Punkte als Mittelpunkt nach No. 3 berechnet. Entsprechend ist es bei $x = \infty$ durch die Substitution $x = t^{-1}$. Der Verlauf der Integrale ist nach dem Verfahren von No. 4 zu untersuchen. Die Differentialdeterminante dieser Integrale bei den singulären Punkten von $F_m = 0$ ergiebt sich aus No. 1 (16.), (18.). Die Constanten in den linearen Relationen zwischen den Integralen bei zwei singulären Punkten waren in Abh. Bd. 87 durch analytische Ausdrücke, deren Convergenz mittels der *Fourier*schen Reihe bewiesen worden ist, gegeben worden und können nach No. 3 und 4 II mit beliebig vorgeschriebener Annäherung berechnet werden. Dass man die zu den singulären Punkten von $F_m = 0$ neu hinzutretenden singulären Punkte dieser Differentialgleichung nicht aufzusuchen braucht, kommt daher, dass man den Uebergang eines Integrales von einem nichtsingulären Punkte derselben zu einem anderen nichtsingulären in einem Kreise, in welchem kein singulärer Punkt von $F_m = 0$ liegt, nach No. 4 III *b.*) mittels der Differential-

gleichung $e^{-W}F_m(e^W y, x) = 0$ bewerkstelligt. Um ein Integral von $F_m = 0$ fortzusetzen, wird dasselbe bei einem Punkte, bei welchem der charakteristische Index in $F_m = 0$ gleich Null ist, durch Integrale der Hauptunterdifferentialgleichungen ausgedrückt (No. 5 I *b.*)). Zu den Differentialgleichungen $F_m = 0$ dieser Art gehören diejenigen, in denen F_m selbst ein normaler Differentialausdruck, also speciell auch wenn F_m ein regulärer Differentialausdruck ist. Zu den Differentialgleichungen $F_m = 0$, die ein System von mehreren Hauptunterdifferentialgleichungen haben, gehört die homogene lineare Differentialgleichung für $m > 1$ mit constanten Coefficienten, von denen wenigstens zwei nicht verschwinden, wie dieses in Abh. Bd. 83 No. 8 II für den Fall, dass der Coefficient von y nicht verschwindet, erläutert ist und auf dieselbe Weise sich ergiebt, wenn dieser Coefficient verschwindet. Sind in Differentialgleichung (1.) der No. 1 die Coefficienten p constant, $p_m = p_{m-1} = \cdots = p_{m-l+1} = 0$, $\operatorname{Mod} p_{m-l} > 0$ $(0 \leqq l \leqq m-1)$ und sind die Wurzeln der Gleichung

$$(1.) \qquad \sigma^{m-l} - p_1\sigma^{m-l-1} + p_2\sigma^{m-l+2} - \cdots + (-1)^{m-l}p_{m-l} = 0,$$

welche die Coefficientengleichung bei $x = t^{-1}$, $t = 0$ ist, $-\sigma_\mathfrak{a}$ $(\mathfrak{a} = 1 \ldots m-l)$, so entspricht einer einfachen Wurzel $-\sigma_\mathfrak{a}$ der normale Differentialausdruck $e^{\sigma_\mathfrak{a} x}\dfrac{de^{-\sigma_\mathfrak{a} x}y}{dx}$, einer ϱ-fachen der normale Differentialausdruck $e^{\sigma_\mathfrak{a} x}\dfrac{d^\varrho e^{-\sigma_\mathfrak{a} x}y}{dx^\varrho}$; zu diesen tritt noch, wenn $l > 0$ ist, der normale und zwar reguläre Differentialausdruck $\dfrac{d^l y}{dx^l}$, und diese Ausdrücke gleich Null gesetzt liefern das System der Hauptunterdifferentialgleichungen.

II. ***Die canonische Form von $F_m(y, x)$ bestehe nicht in nur einem normalen canonischen Bestandtheile,*** so fehlt entweder der nichtnormale canonische Bestandtheil und es sind mehrere normale canonische Bestandtheile vorhanden, oder es kommt auch ein nichtnormaler canonischer Bestandtheil vor. In letzterem Falle habe $F_m(y, x)$ die Darstellung

$$(2.) \qquad \Phi_N(y, x) = s, \quad F_{m-N}(s, x),$$

wo $\Phi_N(y, x)$ das System der normalen canonischen Bestandtheile, $F_{m-N}(s, x)$ der nichtnormale canonische Bestandtheil ist. Ob ein Integral von $F_m = 0$ die Differentialgleichung $\Phi_N = 0$ erfüllt, kann man in folgenden Fällen ohne Weiteres erkennen (über weitere Fälle vgl. III.). Erstens wenn das Integral bei einem Punkte regulär und bei diesem Punkte der charakteristische Index in $F_{m-N} = 0$ gleich $m - N$ ist, so erfüllt dasselbe $\Phi_N = 0$. Denn sonst würde dieses Integral in $\Phi_N(y, x) = s$ eingesetzt für s einen Ausdruck liefern, der

bei diesem Punkte die Form der regulären Integrale hätte, während $F_{m-N}(s,x)=0$ bei diesem Punkte kein reguläres Integral besitzt. Es sei zweitens der charakteristische Index in $F_m=0$ bei einem Punkte gleich Null, und daher auch in $\Phi_N=0$ und $F_{m-N}=0$, bei welchem Punkte ein Integral von $F_m=0$ betrachtet wird. Dann hat man bei diesem Punkte ein System Integrale von $\Phi_N=0$ und $F_{m-N}=0$ unter der Form No. 1 (7.) (8.) zu entwickeln und erhält aus diesen ein System Integrale von $F_m=0$ unter der Form No. 1 (11.), welche Entwickelungen der Form No. 1 (19.) haben (bei $x=\infty$ ist $x=t^{-1}$ einzusetzen und bei $t=0$ zu entwickeln). Wenn nun in der Entwickelung eines Integrales von $F_m=0$ von der Form No. 1 (19.), welches zu dem Exponenten r gehört, dieser Exponent von $x-a$, abgesehen von einer ganzen Zahl, nicht in den Entwickelungen der $m-N$ Integrale von $F_m=0$, für welche s in (2.) von Null verschieden ist, vorkommt, so muss das Integral $\Phi_N=0$ erfüllen. Kommt dieser Exponent auch in Integralen unter den $m-N$ vorhin genannten Integralen von $F_m=0$ vor, ausserdem in Integralen von $\Phi_N=0$, so kann man nach Abh. Bd. 87 No. 2 I das zu untersuchende Integral von $F_m=0$ durch diejenigen ausdrücken, in denen die Exponenten von $x-a$ sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, die unter den Integralen von $\Phi_N=0$ und den übrigen von $F_m=0$ vorkommen und zusehen, ob in diesen Ausdruck die letzteren Integrale nicht eingehen. Um diese Darstellung zu vollziehen, müssen in den Functionen $\chi_{ab}(x)$ in der Entwickelung No. 1 (19.) des Integrales die r_1-r+1 Anfangscoefficienten bekannt sein, wo r_1 von den Wurzeln der Exponentengleichung von $F_m=0$, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, die mit dem grössten reellen Theile ist, also wenn der Punkt in $F_m=0$ nichtsingulär ist, so müssen in der Entwickelung des Integrales die $m-r$ ersten Coefficienten bekannt sein. Die Betrachtung eines Integrales von $F_m=0$, welches der Differentialgleichung $\Phi_N=0$ genügt, kommt auf die Untersuchung des Falles zurück, wo in der canonischen Form von F_m der nichtnormale canonische Bestandtheil nicht vorhanden ist.

Es soll nun, wenn in der canonischen Form von F_m der nichtnormale canonische Bestandtheil fehlt, vorausgesetzt werden, dass F_m mehrere normale canonische Bestandtheile enthält.

a.) Von der Differentialgleichung, die irgend einen der normalen canonischen Bestandtheile als Differentialausdruck enthält, sind die Hauptunterdifferentialgleichungen nach No. 8 *c.*) bekannt, und wenn die Integrale

derselben successive in einer Differentialgleichung vereinigt werden, so erhält man schliesslich den canonischen Bestandtheil dargestellt durch ein System linearer Differentialausdrücke, von denen je einer durch ein System normaler Differentialausdrücke gebildet wird, welches ähnlich ist einem System, das den Differentialausdruck in einer Hauptunterdifferentialgleichung darstellt (vgl. No. 8 *a.*) und *b.*)). Auf diese Weise erhält man also F_m dargestellt durch ein System normaler Differentialausdrücke. Aus diesem System sei bei dem singulären Punkte $x = a$ von $F_m = 0$ ein System bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke (No. 5 I) hergeleitet, welches die Form No. 1 (4.) hat. Dann ergeben sich die Integrale von $F_m = 0$ bei diesem Punkte unter der Form No. 1 (11.), und die Integrale der einzelnen Gruppen erhalten die Entwickelung No. 1 (21.). Es ergeben sich hierdurch also immer die Exponenten von $x-a$ in den Gruppen der Integrale und die Anzahl der linearunabhängigen Integrale in jeder Gruppe. Bei $x = \infty$ ist in das System normaler Differentialausdrücke $x = t^{-1}$ einzusetzen, wie in No. 5 (6.). ***Der Gruppenexponent und die Anzahl der Integrale in jeder Gruppe bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ werden daher gemäss No. 8 a.) und c.) gegeben durch die Wurzeln, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, aus den fundamentalen Exponentengleichungen von $F_m = 0$ bei diesem Punkte.***

b.) Um nun bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ die Integrale einer Gruppe mit dem Gruppenexponenten r darzustellen und weiter zu untersuchen, werden Systeme normaler Differentialausdrücke gesucht, die, gleich Null gesetzt, Differentialgleichungen liefern, deren Integrale in $F_m = 0$ enthalten sind, und welche Systeme bei diesem Punkte den Gruppenexponenten r einstellig enthalten, wie in No. 5 I angegeben ist. Aus einem solchen Systeme ergiebt sich die Darstellung und Werthberechnung der Integrale mit dem Gruppenexponenten r nach dem in den Nummern 1, 2 und 3 angegebenen Verfahren, wie dies in No. 5 I auseinandergesetzt ist, und sind bei allen singulären Punkten von $F_m = 0$ die Integrale dieser Differentialgleichung in der angegebenen Weise ermittelt, so erfolgt die Fortsetzung der Integrale von $F_m = 0$ gemäss den Angaben von No. 4 und 5 I *b.*). Die Berechnung der Differentialdeterminante D der Integrale von $F_m = 0$ bei einem singulären Punkte wird, wenn die Integrale aus einem Systeme, wie das No. 1 vor *a.*) bezeichnete, hervorgehen, aus No. 1 (16.), (18.) vorgenommen, sonst wie in No. 5 I *b.*) angegeben. Wenn man einen Werth $\delta' < \operatorname{Mod} D$ ermittelt hat, so kann man bei den Untersuchungen von No. 4 einen Werth $\delta < \delta'$

anwenden und zugleich einen beliebigen Werth $\varkappa < \frac{\delta'-\delta}{2}$ angeben als eine Grösse von der Eigenschaft, dass, wenn $D = D' + D''$ ist, und man $\operatorname{Mod} D'' < \varkappa$ setzt, alsdann dieser Bedingung entsprechend D' berechnet, sich $\operatorname{Mod} D' > \delta + \varkappa$ ergiebt, da $\operatorname{Mod} D' > \delta' - \varkappa$ ist, woraus $\operatorname{Mod} D > \delta$ folgt.

Es ist also zuzusehen, wie sich aus der normalen canonischen Form von F_m die Systeme normaler Differentialausdrücke ergeben, die bei den singulären Punkten von $F_m = 0$ die Gruppenexponenten einstellig enthalten.

Die Hauptunterdifferentialgleichungen einer Differentialgleichung, in der ein canonischer Bestandtheil von F_m gleich Null gesetzt ist, enthalten normale Differentialausdrücke, deren determinirende Factoren bekannt sind und deren reguläre Ausdrücke gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, von denen bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$ die Wurzeln der Exponentengleichungen bekannt sind.

Aus den Differentialausdrücken der Hauptunterdifferentialgleichungen je eines canonischen Bestandtheiles sei in irgend einer Anordnung ein System gebildet, und diese Systeme sollen in der Reihenfolge der entsprechenden canonischen Bestandtheile zu einem Systeme zusammengesetzt sein. *Wenn sich die Anordnung jener Differentialausdrücke so treffen lässt, dass im Ganzen ein System hervorgeht, welches bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ die in No. 1 vor a.) angegebene Eigenschaft hat,* und man nun bei jedem canonischen Bestandtheile die Integrale der Hauptunterdifferentialgleichungen, letztere in derselben Anordnung genommen, successive in einer Differentialgleichung vereinigt, so erhält man gemäss No. 8 *a.*) und *b.*) *unmittelbar eine Darstellung von F_m durch ein System von der No. 1 vor a.) bezeichneten Eigenschaft.* Bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ werden die Wurzeln der Exponentengleichungen in den regulären Ausdrücken, die zu den normalen Ausdrücken in allen Hauptunterdifferentialgleichungen bei je einem canonischen Bestandtheile gehören, zusammengestellt. *Wenn nun eine solche Wurzel bei einem canonischen Bestandtheile sich von einer bei einem anderen canonischen Bestandtheile nicht um eine ganze Zahl unterscheidet, so kann man unmittelbar die Systeme normaler Differentialausdrücke angeben, welche die Gruppenexponenten bei diesem singulären Punkte einstellig enthalten und gleich Null gesetzt die linearunabhängigen Integrale von $F_m = 0$ jeder Gruppe bei demselben Punkte liefern.* Denn wenn man den canonischen Bestandtheil, in dessen Hauptunterdifferentialgleichungen bei dem betrachte-

ten Punkte der Gruppenexponent r vorkommt, und die folgenden canonischen Bestandtheile aus der canonischen Form wegnimmt, alsdann auf das System der vorhergehenden canonischen Bestandtheile als Bestandtheil eines Systems den Differentialausdruck einer Hauptunterdifferentialgleichung, in welcher der Gruppenexponent r vorkommt, folgen lässt, so erhält man ein System normaler Differentialausdrücke, welches r einstellig enthält, und wenn man in derselben Weise jede der Hauptunterdifferentialgleichungen, bei welcher r vorkommt, verwendet, so erhält man Systeme, welche r einstellig enthalten und gleich Null gesetzt die sämmtlichen linearunabhängigen Integrale dieser Gruppe liefern (No. 5 II vor *b.*)).

c.) Wenn aber bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ der Gruppenexponent r aus Hauptunterdifferentialgleichungen, die in mehr als einem canonischen Bestandtheil sich finden, hervorgeht, so ist unter Anknüpfung an No. 5 II und III in folgender Weise zu verfahren, um Systeme, die den Gruppenexponenten r einstellig enthalten, herzuleiten. $F_m(y, x)$ sei dargestellt durch das System

$$(3.)\qquad R(y, x) = y_1, \quad S(y_1, x) = y_2, \quad T(y_2, x),$$

wo R, S, T Systeme normaler Differentialausdrücke sind, R sich auch auf y, T auf y_2 reduciren kann, und bei dem betrachteten singulären Punkte von $F_m = 0$ ein Bestandtheil von R den Gruppenexponenten r nicht enthält, in S alle Bestandtheile vorkommen, die r mit einem fixirten zugehörigen determinirenden Factor enthalten, ausserdem etwa noch andere Bestandtheile, die Bestandtheile in T r entweder nicht enthalten, oder mit anderen zugehörigen determinirenden Factoren, als jener fixirte ist.

Wenn es nun ein oder mehrere Systeme normaler Differentialausdrücke giebt, welche den Gruppenexponenten r einstellig mit einem und demselben determinirenden Factor e^w bei dem singulären Punkte von $F_m = 0$ enthalten, welche gleich Null gesetzt, Differentialgleichungen liefern, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen, so giebt es nach No. 5 II auch ein solches System normaler Differentialausdrücke, welches r einstellig mit demselben zugehörigen determinirenden Factor enthält und gleich Null gesetzt eine Differentialgleichung liefert, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen, und in welcher die Integrale jener Differentialgleichungen vereinigt sind. Dann giebt es nach No. 5 III auch ein System normaler Differentialausdrücke, welches an der Spitze eines Systemes solcher Ausdrücke zur Darstellung von S steht, und r einstellig mit demselben zugehörigen determinirenden Factor bei dem sin-

gulären Punkte enthält, und welches gleich Null gesetzt eine Differentialgleichung giebt, die eben so viele linearunabhängige Integrale mit dem Gruppenexponenten r liefert, als die vorhin genannte Differentialgleichung. Folgt dieses System auf R in (3.), so erhält man ein System, welches r einstellig enthält und eben so viele Integrale der bezeichneten Art von $F_m = 0$ liefert. Wenn in mehreren Systemen normaler Differentialausdrücke derselbe Gruppenexponent r einstellig mit verschiedenen zugehörigen determinirenden Factoren bei dem singulären Punkte von $F_m = 0$ vorkommt, diese Systeme gleich Null gesetzt Differentialgleichungen geben, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen, so sind die aus diesen Differentialgleichungen hervorgehenden Integrale mit dem Gruppenexponenten r unter einander linearunabhängig. Es ist daher zuzusehen, ob S durch ein System normaler Differentialausdrücke sich darstellen lässt, an dessen Spitze ein solches System normaler Differentialausdrücke steht, welches den Gruppenexponenten r einstellig mit dem bestimmten determinirenden Factor e^w bei dem singulären Punkte von $F_m = 0$ enthält, und linearunabhängige Integrale mit dem Gruppenexponenten r liefert *in der Anzahl der Wurzeln der Exponentengleichung von* $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ *bei diesem Punkte, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, gemäss dem in a.) und in* No. 5 II *b.) Gesagten.*

Zu dem Zwecke wird folgende Darstellung von S aufgesucht:

$$(4.) \qquad S'(y, x) = y_1, \quad S''(y_1, x);$$

S' und S'' sind Systeme normaler Differentialausdrücke; in S', welches sich auch auf y reduciren kann, soll der Gruppenexponent r bei dem singulären Punkte in keinem Bestandtheile vorkommen. Der Differentialausdruck S'' sei entweder durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt, aus welchem ein System bei dem singulären Punkte normaler Differentialausdrücke, in dem je zwei auf einander folgende zu diesem Punkte gehörende determinirende Factoren von einander verschieden sind, mit folgender Eigenschaft hervorgeht. Dieses System beginnt *mit einem Differentialausdruck, der als zu diesem Punkte gehörenden determinirenden Factor den fixirten* e^w *enthält und einen bei diesem Punkte regulären Differentialausdruck hat, in dessen Exponentengleichung so viele Wurzeln, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, wie in der Exponentengleichung von* $e^{-w}F_m(e^w y, x) = 0$ *vorkommen.* Oder S'' sei nur durch ein solches System normaler Differentialausdrücke darstellbar, bei dem ein unzerlegbarer Differentialausdruck an der Spitze den Gruppenexponenten r bei dem betrachteten Punkte enthalten muss.

In letzterem Falle ist zur Erfüllung der gestellten Forderung nothwendig und hinreichend, dass es eine Darstellung von S'' giebt, die mit einem solchen normalen Differentialausdruck beginnt, der den determinirenden Factor e^{w} bei dem singulären Punkte enthält, und wenn man nebst diesem die folgenden normalen Differentialausdrücke, bei denen der zu diesem Punkte gehörende determinirende Factor derselbe e^{w} ist, herausnimmt, dass zu dem hierdurch hervorgehenden, bei dem singulären Punkte normalen Differentialausdrucke ein bei diesem Punkte regulärer Differentialausdruck gehört, in dessen Exponentengleichung so viele Wurzeln, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, wie in der Exponentengleichung von $e^{-w}F_m(e^{w}y, x) = 0$ vorkommen. Um letztere Darstellung von S'' zu erhalten, ist zu bemerken, dass wenn von einem Differentialausdruck, der durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, eine Darstellung gebildet wird, bei welcher man auf irgend einen an der Spitze stehenden normalen Differentialausdruck successive solche normalen Ausdrücke folgen lässt, die denselben zu einem bestimmten Punkte gehörenden determinirenden Factor wie der erste Bestandtheil haben, bis kein weiterer solcher Ausdruck folgen kann, das System der bis dahin auftretenden Bestandtheile einen Differentialausdruck bildet, der bei allen solchen Darstellungen, bei welchen derselbe zu diesem Punkte gehörende determinirende Factor auftritt, ***ein und derselbe*** ist. Denn wenn zwei verschiedene solche Differentialausdrücke beständen und man dieselben gleich Null setzte, so könnten die Integrale der einen der hierdurch erhaltenen Differentialgleichungen nicht in der anderen enthalten sein, weil sonst auf den einen Differentialausdruck in der Darstellung von G noch andere normale Ausdrücke mit demselben zu dem betrachteten Punkte gehörenden determinirenden Factor folgen würden. Vereinigt man nun die linearunabhängigen Integrale beider Differentialgleichungen in einer homogenen linearen Differentialgleichung, so ist in dieser der Differentialausdruck von höherer Ordnung als in jeder der beiden und durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, die denselben zu dem Punkte gehörenden determinirenden Factor haben.

Um nun die Systeme (3.) ***und*** (4.) ***darzustellen, hat man in folgender Weise zu verfahren.*** Aus der canonischen Form von F_m wird folgende Darstellung von F_m hergeleitet. Der canonische Bestandtheil von F_m, bei welchem zuerst der Gruppenexponent r bei dem singulären Punkte auftritt, $B(y, x)$ wird unter der Form $B'(y, x) = y_1$, $B''(y_1, x)$ dargestellt, wo $B' = 0$

die Integrale der Hauptunterdifferentialgleichungen vereinigt enthält, in denen r bei diesem Punkte nicht vorkommt. Der canonische Bestandtheil von F_m, bei welchem zuletzt r vorkommt, $D(y, x)$ wird unter der Form $D'(y, x) = y_1$, $D''(y_1, x)$ dargestellt, wo $D' = 0$ die Integrale der Hauptunterdifferentialgleichungen vereinigt enthält, in denen r vorkommt. Das System der canonischen Bestandtheile vor B sei $A(y, x)$, das zwischen B und D sei $C(y, x)$, das nach D sei $E(y, x)$. Dann wird R gleich $A(y, x) = y_1$, $B'(y_1, x)$; S wird gleich $B''(y, x) = y_1$, $C(y_1, x) = y_2$, $D'(y_2, x)$; T wird gleich $D''(y, x) = y_1$, $E(y_1, x)$. C kann sich auch auf y_1, D' auf y_2 reduciren. Ist nun S bei dem singulären Punkte normal, so tritt es als S'' in (4.) auf, S' reducirt sich auf y. Ist S bei dem singulären Punkte nicht normal, so wird der erste canonische Bestandtheil des Differentialausdruckes S aufgesucht. Sind unter den zu ihm gehörenden Hauptunterdifferentialgleichungen solche, die den fixirten determinirenden Factor e^w bei dem singulären Punkte enthalten, und bei denen die in ihnen enthaltenen regulären Differentialausdrücke bei diesem Punkte Exponentengleichungen haben, deren Wurzeln, die sich von r nur um ganze Zahlen unterscheiden, in der Gesammtanzahl vorkommen, in der solche Wurzeln in der Exponentengleichung von $e^{-w} F_m(e^w y, x) = 0$ vorhanden sind, so werden die Integrale dieser Hauptunterdifferentialgleichungen in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt; deren Differentialausdruck wird an die Spitze einer Darstellung von S'' gestellt, während S' sich auf y reducirt. Wenn aber solche Hauptunterdifferentialgleichungen nicht vorhanden sind, so wird aus jeder Hauptunterdifferentialgleichung dieses canonischen Bestandtheiles von S, welche den Gruppenexponenten r bei dem singulären Punkt von $F_m = 0$ enthält, die Differentialgleichung der höchsten Ordnung $\geqq 0$, welche r bei diesem Punkte nicht enthält, und deren Integrale in jener Differentialgleichung enthalten sind, herausgezogen. Es kann dabei jedesmal nur eine Differentialgleichung von höchster Ordnung auftreten, weil zwei verschiedene auf eine solche Differentialgleichung von noch höherer Ordnung führen würden. Die Integrale der auf diese Weise erhaltenen Differentialgleichungen und die Integrale derjenigen Hauptunterdifferentialgleichungen desselben canonischen Bestandtheiles, welche r bei jenem singulären Punkte nicht enthalten, werden in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt. Deren Differentialausdruck, der also durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, wird an die Spitze einer Darstellung

von S durch ein System normaler Differentialausdrücke gestellt, der übrig bleibende Theil dieser Darstellung sei $S^{(1)}$. ***Nun wird mit $S^{(1)}$ gerade so verfahren, wie mit S verfahren worden ist.*** Es ist also zunächst zuzusehen, ob $S^{(1)}$ bei dem betreffenden Punkte normal ist. Ist dieses nicht der Fall, so wird der erste canonische Bestandtheil von $S^{(1)}$ genommen. Dann ist zu sehen, ob die Hauptunterdifferentialgleichungen desselben mit dem bestimmten determinirenden Factor bei jenem Punkte Wurzeln, die sich von dem Gruppenexponenten r nur um ganze Zahlen unterscheiden, in der erforderlichen Anzahl liefern. Ist dieses nicht der Fall, so werden wieder aus den Hauptunterdifferentialgleichungen, die r enthalten, diejenigen Differentialgleichungen höchster Ordnung $\geqq 0$, die r nicht enthalten, herausgenommen und die Integrale derselben mit den Integralen der Hauptunterdifferentialgleichungen dieses canonischen Bestandtheiles, die r nicht enthalten, in einer Differentialgleichung vereinigt; deren Differentialausdruck wird an die Spitze einer Darstellung von $S^{(1)}$ gestellt, der übrig bleibende Theil sei $S^{(2)}$. Dann ist in derselben Weise in Bezug auf $S^{(2)}$ zu verfahren. Dieses Verfahren wird fortgesetzt, bis man entweder auf einen Differentialausdruck stösst mit der ersten bei (4.) angegebenen Eigenschaft von S'', oder bis man zu einem solchen Differentialausdruck kommt, dessen erster canonischer Bestandtheil Hauptunterdifferentialgleichungen hat, bei denen sich aus keiner eine Differentialgleichung, deren Integrale diese Hauptunterdifferentialgleichung erfüllen, herausnehmen lässt, die den Gruppenexponenten r bei dem singulären Punkte von $F_m = 0$ nicht enthält; dieser Differentialausdruck ist dann S'' mit der anderen dort angegebenen Eigenschaft.

Bei der Ausführung dieses Verfahrens ist der Satz zu berücksichtigen, dass zwei Darstellungen eines durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbaren Differentialausdruckes, die durch Systeme unzerlegbarer Differentialausdrücke gegeben werden, nur normale Bestandtheile enthalten können, und dass die Bestandtheile des einen Systemes mit denen des anderen sich so paaren lassen, dass die in einem Paare stehenden ähnlich sind. Und es ist der Satz zu beachten, wenn Φ_m und Ψ_n Systeme unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke sind und die Integrale von $\Phi_m = 0$ und $\Psi_n = 0$ von einander linearunabhängig, dass, wenn diese Integrale in einer Differentialgleichung $\Phi_m(y, x) = y_1$, $\psi_n(y, x) = 0$ vereinigt werden, ψ_n durch ein System unzerlegbarer normaler Differentialausdrücke dargestellt wird, welches ähnlich ist dem System Ψ_n. (Vgl. No. 6.) Da man von S die Hauptunterdiffe-

rentialgleichungen bei dem ersten und letzten Bestandtheile B'' und D', so wie die Hauptunterdifferentialgleichungen der etwa zwischen liegenden canonischen Bestandtheile von F_m kennt, so kennt man daher von einem Systeme normaler Differentialausdrücke, welches S darstellt, die determinirenden Factoren der einzelnen Bestandtheile und die Wurzeln der Exponentengleichungen ihrer regulären Differentialausdrücke bis auf ganze Zahlen. Man kann demnach gemäss den vorhin angegebenen Sätzen unmittelbar erkennen, ob S bei dem betrachteten singulären Punkte von $F_m = 0$ normal ist, ebenso ob $S^{(1)}$ oder $S^{(2)}$ etc. normal ist; der zugehörige determinirende Factor ist dann der fixirte. Und bei der Aufsuchung der Hauptunterdifferentialgleichungen des jedesmaligen ersten canonischen Bestandtheiles nach dem Verfahren von No. 8 III sind die fundamentalen determinirenden Factoren hier ebenfalls unmittelbar bekannt und die Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen bis auf ganze Zahlen. Bei der Ausführung im Einzelnen, wo das Verfahren No. 7 II in Anwendung kommt, ist noch der Satz No. 6 II *b.*) zu berücksichtigen.

d.) Wenn untersucht werden soll, ob $F_m(y, x)$ ***bei einem singulären Punkte von*** $F_m = 0$ ***sich auf die in No. 1 vor a.) bezeichnete Form bringen lässt,*** wofern dies sich nicht unmittelbar aus der canonischen Form gemäss *b.*) ergiebt, so sind die Differentialausdrücke der Hauptunterdifferentialgleichungen durch Systeme unzerlegbarer Ausdrücke A darzustellen. Dann sind aus diesen Ausdrücken A die etwa bestehenden Systeme Σ zu bilden, welche die in No. 1 vor *a.*) angegebene Eigenschaft besitzen. Und nun ist gemäss den am Schlusse von *c.*) angeführten Sätzen über die Aehnlichkeit nothwendig und hinreichend, dass F_m sich durch ein einem solchen Systeme Σ ähnliches Σ' darstellen lässt. Es kann an jeder Stelle von Σ' nur ein bestimmter Bestandtheil stehen, wenn je zwei A nicht ähnlich sind. Wenn aber unter den A ähnliche Ausdrücke vorkommen und Σ' besteht, so kann man zunächst den normalen Ausdruck möglichst hoher Ordnung $G(y, x)$ aufsuchen, der ein System für F_m unter der Form $G(y, x) = y_1$, $H(y_1, x)$ beginnt, und welcher durch ein System gegeben wird, dessen Bestandtheile dem ersten Bestandtheil in Σ' bezüglich Σ ähnliche Ausdrücke sind. Es kann nur einen Ausdruck G geben. Werden nun aus dem Systeme Σ' gewisse mit den Bestandtheilen von G als ähnliche gepaarten Bestandtheile gestrichen, so muss das übrig bleibende System die in No. 1 vor *a.*) angegebene Eigenschaft behalten und ist nach No. 6 I *a.*) ähnlich einem Systeme für H. Dann ist mit je einem der aus Σ' und be-

züglich Σ übrig gebliebenen Systeme und dem Ausdruck H in derselben Weise zu verfahren.

Soll untersucht werden, ob $F_m = 0$ ein System Unterdifferentialgleichungen hat, von denen jede bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ sich, wie in No. 1 vor *a.*) angegeben ist, verhält, so sind aus den sämmtlichen A Systeme mit derselben Eigenschaft zu bilden. Dann ist zu sehen, ob es Systeme Σ', welche letzteren ähnlich sind, giebt, so dass die Integrale von $\Sigma' = 0$ $F_m = 0$ erfüllen, und ob die Integrale der Differentialgleichungen $\Sigma' = 0$ unter einander linearunabhängig sind (Abh. Bd. 83 No. 2, No. 7 IV *c.*)).

e.) ***Beispiele von Ausdrücken $F_m(y, x)$, die durch eine normale canonische Form mit mehr als einem canonischen Bestandtheile dargestellt werden, kann man nach folgenden Angaben bilden.*** Es ist in Abh. Bd. 83 No. 8 I gezeigt worden, wie man ein System Ψ_r von der Form $\Phi_r(y, x) = y_1$, $\chi_r(y_1, x)$ mit zwei canonischen Bestandtheilen Φ_r und χ_r, die normale Ausdrücke sind, bilden kann. (Es war dort Φ_r regulär angenommen, man kann aber statt Ψ_r $\Omega\Psi_r(\Omega^{-1}y, x)$ nehmen, wo Ω ein beliebiger determinirender Factor ist.) Es werden nun mehrere solche Systeme Ψ_r $(r = 1, \dots n)$ gebildet, und die determinirenden Factoren in den Φ_r und χ_r $(r = 1, \dots n)$ alle von einander verschieden genommen. Die Integrale von $\Psi_r = 0$ $(r = 1, \dots n)$ sind linearunabhängig (Abh. Bd. 83 No. 7 IV *c.*)). Die Integrale von $\Phi_r = 0$ $(r = 1, \dots n)$ werden vereinigt in $F_{(1)} = 0$, die von $\Psi_r = 0$ und $F_{(1)} = 0$ in $F_{(1)}(y, x) = y_1$, $\psi'_r(y_1, x) = 0$ und die Integrale von $\psi'_r = 0$ $(r = 1, \dots n)$ in $F_{(2)} = 0$. Dann ist $F_{(1)}(y, x) = y_1$, $F_{(2)}(y_1, x)$ ein Ausdruck mit zwei canonischen Bestandtheilen. Die Hauptunterdifferentialgleichungen des ersten Bestandtheiles sind $\Phi_r = 0$ $(r = 1, \dots n)$. Eine Differentialgleichung $X = 0$ mit unzerlegbarem Ausdrucke und einem determinirenden Factor aus einem χ_r für $r = s$, deren Integrale $F_{(1)} = y_1$, $F_{(2)}(y_1, x) = 0$ erfüllen, kann nicht bestehen. Denn werden die Integrale von $\Phi_s = 0$ und $X = 0$ in $X(y, x) = y_1$, $\varphi_s(y_1, x) = 0$ vereinigt, und F_m auf die Form $X = y_1$, $\varphi_s = y_2$, $\xi(y_2, x)$ gebracht, so würde sich aus No. 6 I *a.*) ergeben, dass in $\Psi_s = 0$ die Integrale einer Differentialgleichung mit einem Ausdrucke, der X ähnlich ist, enthalten wären. Die Hauptunterdifferentialgleichungen des zweiten Bestandtheiles sind $\psi'_r = 0$.

III. ***In der canonischen Form von F_m sei der nichtnormale canonische Bestandtheil vorhanden.*** Derselbe sei $F_{m-N}(s, x)$, wenn N die Ordnung des durch das System der normalen canonischen Bestandtheile dargestellten Differentialausdruckes bezeichnet.

a.) Von dem homogenen linearen Differentialausdrucke $F_{m-N}(s, x)$ werde der reciproke Differentialausdruck $\underline{F}_{m-N}(s, x)$ genommen (s. Abh. Bd. 83 No. 7 V). Nun werde $\underline{F}_{m-N}(s, x)$ auf die canonische Form gebracht, dieselbe sei $\underline{\varphi}_{N'}(s, x) = s_1$, $\underline{F}_M(s_1, x)$, wo $\underline{\varphi}_{N'}$ das System N'^{ter} Ordnung der normalen canonischen Bestandtheile, $\underline{F}_M$ der nichtnormale canonische Bestandtheil ist, dessen Ordnung M sei, so dass $m = N + M + N'$. Die zu $\underline{\varphi}_{N'}$ und $\underline{F}_M$ reciproken Differentialausdrücke seien durch $\varphi_{N'}$ und F_M bezeichnet. Wird $\underline{\varphi}_{N'}$ durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt, so erhält man aus diesem $\varphi_{N'}$ durch das reciproke System dargestellt, d. h. durch das System der reciproken Differentialausdrücke, diese in umgekehrter Reihenfolge genommen. Der reciproke Differentialausdruck eines normalen ist selbst ein normaler, in welchem der determinirende Factor den reciproken Werth des ursprünglichen hat und der reguläre Ausdruck der reciproke des regulären in dem ursprünglichen Differentialausdrucke ist (Abh. Bd. 83 No. 7 V). Ferner wird der Differentialausdruck $F_{m-N}(s, x)$ durch das zu einem Systeme von $\underline{F}_{m-N}(s, x)$ reciproke System dargestellt, also durch

$$(5.)\qquad F_M(s, x) = s', \quad \varphi_{N'}(s', x).$$

In diesem System kann sich F_M nicht auf s reduciren, wohl aber $\varphi_{N'}$ auf s'. F_M lässt sich also nicht mehr durch ein System homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten, in dem der erste oder letzte Bestandtheil ein normaler Ausdruck ist, darstellen.

Was die Reduction des Differentialausdruckes $\underline{F}_{m-N}(s, x)$ auf die canonische Form betrifft, die nach dem Verfahren No. 8 *c.*) geschieht, so ist zu bemerken, dass für den reciproken Ausdruck $F_{m-N}(s, x)$ bei den singulären Punkten von $F_m = 0$, insofern sie noch in $F_{m-N} = 0$ singulär sind, die fundamentalen determinirenden Factoren e^w und die Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen von $F_{m-N} = 0$ bis auf ganze Zahlen gemäss No. 8 *c.*) bekannt sind. Der reciproke Ausdruck von $e^{-w}F_{m-N}(e^w s, x)$ ist aber $e^w \underline{F}_{m-N}(e^{-w}s, x)$, wie sich ergiebt, wenn man bei einem nichtsingulären Punkte von $F_{m-N} = 0$ ein System Integrale unter der Form No. 1 (7.) entwickelt und hieraus ein System Integrale von $e^{-w}F_m(e^w s, x) = 0$ unter der Form No. 1 (9.) herleitet, alsdann aus diesen, indem die reciproken Werthe der μ in umgekehrter Reihenfolge genommen werden, die Integrale der reciproken Differentialgleichung bildet (vgl. Abh. Bd. 83 No. 7 V (18.) (19.)). Der charakteristische Index in einer homogenen linearen Differential-

gleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 $f_m(y, x) = 0$ stimmt bei jedem Punkte mit dem in der reciproken Differentialgleichung überein. Die Wurzeln der Exponentengleichung der einen Differentialgleichung unterscheiden sich von den mit entgegengesetzten Vorzeichen genommenen Wurzeln der Exponentengleichung der anderen Differentialgleichung bei jedem Punkte um eine ganze Zahl (Abh. Bd. 76 No. 3 (10.), Abh. Bd. 83 No. 7 V p. 137). — Es möge bemerkt werden, dass man, um diesen Satz nachzuweisen, auch folgendes Verfahren anwenden kann. Ist in $f_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ der charakteristische Index gleich $h \geqq 0$, so ist zu zeigen, dass das Gleichungspolynom in der Exponentengleichung von $\underline{f}_m = 0$ bei $x = a$, $\psi(\varrho)$, aus dem der Exponentengleichung von $f_m = 0$, $\chi(r)$, durch die Gleichung $\psi(\varrho) = (-1)^{m-h}\chi(r)$ hervorgeht, wenn $r = -\varrho + G - 1$ gesetzt wird, wo $G = \pi_h + m - h$, π_h die Ordnung ist, in der der Coefficient von $\frac{d^{m-h}y}{dx^{m-h}}$ in f_m unendlich wird. Die Uebereinstimmung zwischen diesen beiden Gleichungspolynomen ergiebt sich durch das Verfahren (welches auch in anderen ähnlichen Fällen, Abh. Bd. 74 No. 6 (5.), Bd. 76 p. 284, 285 anwendbar ist), dass man in beiden Polynomen die Constanten, die aus den Coefficienten der Differentialgleichung $f_m = 0$ hervorgehen, durch die symmetrischen Verbindungen der Wurzeln der Exponentengleichung von $f_m = 0$ ausgedrückt ansieht, alsdann die Uebereinstimmung der Polynome zunächst für Werthe dieser Wurzeln, von denen je zwei sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, mittels passend gewählter Integrale von $f_m = 0$, die zu diesen Wurzeln als Exponenten gehören, nachweist; aus der Stetigkeit folgt dann die Uebereinstimmung für beliebige Werthe der Wurzeln. Man setze, um f_m diesem Zwecke gemäss zu bilden, in einen Differentialausdruck h^{ter} Ordnung mit dem charakteristischen Index h und der Ordnungszahl π_h, in welcher der Coefficient von y unendlich wird, $F_h(y, x)$, für y $m-h$ beliebige Functionen $(x-a)^{r_a}\sum_0^\infty c_a(x-a)^a$, c_0 von Null verschieden, in denen je zwei r_a sich nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Man erhält dadurch $m-h$ Functionen s_1 bis s_{m-h} von der Form $(x-a)^{r_a-\pi_h}\sum_0^\infty k_a(x-a)^a$, worin k_0 von Null verschieden, die die Differentialgleichung $f_{m-h} = 0$ erfüllen. Dann hat die Exponentengleichung von $F_h(y, x) = s$, $f_{m-h}(s, x) = f_m(y, x) = 0$ die Wurzeln r_1 bis r_{m-h}. Bildet man nun h beliebige Integrale von $F_h = 0$ unter der Form μ_1, $\mu_1\int\mu_1^{-1}\mu_2\,dx$, etc. und aus den Grössen s_1 bis s_{m-h} in beliebiger Reihenfolge genommen $m-h$

Integrale von $f_{m-h} = 0$ unter der Form No. 1 (7.), alsdann aus den Integralen von $F_h = 0$ und $f_{m-h} = 0$ die Integrale von $f_m = 0$ unter der Form No. 1 (11.), so leitet man aus diesen Ausdrücken $m-h$ Werthe des Integrales μ_m^{-1} von $\underline{f}_m = 0$ her von der Form $(x-a)^\varrho \sum_0^\infty g_\alpha (x-a)^\alpha$, wo g_0 von Null verschieden, $\varrho = \pi_h + m - h - r_\alpha - 1$, aus welchen die Uebereinstimmung der oben genannten Gleichungspolynome für r_1 bis r_{m-h} hervorgeht. — Aus dem oben Gesagten folgt nun, dass auch für den Differentialausdruck $\underline{F}_{m-N}$ bei jedem singulären Punkte von $F_m = 0$, insofern er noch in $\underline{F}_{m-N} = 0$ singulär ist, die fundamentalen determinirenden Factoren und die Wurzeln der fundamentalen Exponentengleichungen von $\underline{F}_{m-N} = 0$ bis auf ganze Zahlen bekannt sind. Bei allen anderen singulären Punkten von $\underline{F}_{m-N} = 0$ ist der charakteristische Index gleich Null und die Wurzeln der zugehörigen Exponentengleichungen sind ganzzahlig. Nachdem $\underline{F}_{m-N}$ auf die canonische Form $\underline{\varphi}_{N'}(s, x) = s_1$, $\underline{F}_M(s, x)$ gebracht ist, erhält man durch das reciproke System von $\underline{\varphi}_{N'}$ das System für $\varphi_{N'}$. Dieser Differentialausdruck ist also durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar, von denen man die determinirenden Factoren und die Wurzeln der Exponentengleichungen bei den singulären Punkten bis auf ganze Zahlen kennt.

b.) $F_m(y, x)$ hat nun die Darstellung

$$(6.) \qquad \Phi_N(y, x) = s, \quad F_M(s, x) = s', \quad \varphi_{N'}(s', x),$$

wo Φ_N das System der normalen canonischen Bestandtheile in der canonischen Form von F_m ist. Wenn man von dem reciproken Differentialausdrucke $\underline{F}_m(y, x)$ von F_m, der durch das zu dem Systeme (6.) reciproke System dargestellt wird, die canonische Form aufstellt, so braucht in dieser das System der normalen canonischen Bestandtheile nicht mit dem reciproken Ausdrucke von $\varphi_{N'}$ zusammenzufallen. Dieses ersieht man aus dem Falle, wenn F_m dadurch entstanden ist, dass die Integrale von $\Phi_N = 0$ und $\Psi_{m-N} = 0$ in einer Differentialgleichung vereinigt sind, wo Φ_N ein System normaler Differentialausdrücke ist, Ψ_{m-N} ein homogener linearer Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten, der nicht durch ein System homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten, in dem ein normaler Differentialausdruck an der Spitze steht, darstellbar ist. Ein solcher Ausdruck wird z. B. dadurch gegeben, dass bei einem singulären Punkte von $\Psi_{m-N} = 0$, bei welchem der charakteristische Index gleich $m-N$ ist, kein Exponent

zur Bildung einer Hauptpotenz (No. 7 III *b.*) sich vorfindet. Alsdann wird F_m dargestellt durch

$$(7.)\qquad \Phi_N(y, x) = s, \quad F_{m-N}(s, x),$$

wo nach No. 6 II *a.*) der homogene lineare Differentialausdruck mit rationalen Coefficienten F_{m-N} nicht durch ein System solcher Differentialausdrücke, an dessen Spitze ein normaler Differentialausdruck steht, darstellbar ist. Demnach ist Φ_N das System der normalen canonischen Bestandtheile in F_m, und F_{m-N} hat die Darstellung (5.). Andererseits hat F_m die Darstellung

$$(8.)\qquad \Psi_{m-N}(y, x) = s', \quad \chi_N(s', x),$$

wo nach No. 6 II *a.*) χ_N durch ein System normaler Differentialausdrücke dargestellt wird, welches ähnlich ist einem Systeme für Φ_N. Die reciproken Ausdrücke von Φ_N, Ψ_{m-N} und χ_N seien durch $\underline{\Phi}_N$, $\underline{\Psi}_{m-N}$, $\underline{\chi}_N$ bezeichnet, so hat $\underline{F}_m(y, x)$ die Darstellungen

$$(9.)\qquad \underline{\varphi}_{N'}(y, x) = y_1, \quad \underline{F}_M(y_1, x) = y_2, \quad \underline{\Phi}_N(y_2, x),$$

$$(10.)\qquad \underline{\chi}_N(y, x) = y_1, \quad \underline{\Psi}_{m-N}(y_1, x).$$

M ist $\geqq 2$, $N' = m - N - M$. Wird nun $N \geqq m - N - 1$ genommen, so ist $N > N'$, und es ergiebt sich aus (9.) und (10.), dass $\underline{\varphi}_{N'}$ nicht das System der normalen canonischen Bestandtheile in der canonischen Form von $\underline{F}_m(y, x)$ ist. Wenn eine Differentialgleichung ein System von Hauptunterdifferentialgleichungen hat, so hat die reciproke auch ein System von Hauptunterdifferentialgleichungen. Wenn aber ein Differentialausdruck eine normale canonische Form mit mehreren canonischen Bestandtheilen hat, so braucht der zu dem letzten dieser Bestandtheile reciproke Differentialausdruck nicht der erste canonische Bestandtheil in der canonischen Form des zu dem ursprünglichen Differentialausdrucke reciproken zu sein. Dieses ersieht man aus dem Beispiele, wenn man ein System G von zwei normalen Differentialausdrücken mit verschiedenen determinirenden Factoren Ω_1 und Ω_2 nimmt, so dass in der Differentialgleichung $G = 0$ nicht die Integrale einer solchen Differentialgleichung enthalten sind, in welcher ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω_2 gleich Null gesetzt ist (s. Abh. Bd. 83 No. 8 I p. 145), und wenn man die Integrale von $G = 0$ mit den Integralen anderer Differentialgleichungen $H_{(1)} = 0$ bis $H_{(\iota)} = 0$, in denen normale Differentialausdrücke mit von den vorigen und unter einander verschiedenen determinirenden Factoren gleich Null gesetzt sind, in einer

Differentialgleichung $F_m = 0$ vereinigt. Diese Differentialgleichung enthält dann auch nicht die Integrale einer solchen, in welcher ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω_2 gleich Null gesetzt ist. Denn sonst müssten die Integrale derselben auch die Differentialgleichung $G = 0$ erfüllen, weil anderenfalls, wenn man die linearunabhängigen Integrale beider Differentialgleichungen in einer Differentialgleichung vereinigte, die Integrale dieser und die von $H_{(1)} = 0$ bis $H_{(\iota)} = 0$ unter einander linearunabhängig wären (Abh. Bd. 83 No. 7 IV *c.*)) und mehr als m linearunabhängige Integrale von $F_m = 0$ bilden würden. Demnach ist der zweite canonische Bestandtheil von F_m ein normaler Differentialausdruck mit dem determinirenden Factor Ω_2, während der reciproke Differentialausdruck von F_m $\overline{F}_m$ zum ersten canonischen Bestandtheil einen solchen hat, zu dem mehrere Hauptunterdifferentialgleichungen gehören.

c.) Nachdem nun der nichtnormale canonische Bestandtheil von F_m $F_{m-N}(s, x)$ die Darstellung (5.) erhalten hat, ist von dem Differentialausdrucke $\varphi_{N'}(s', x)$ in (5.) die canonische Form nach dem Verfahren von No. 8 I *c.*) herzustellen, dieselbe ist also eine normale. ***Die Integrale der Differentialgleichung*** $\varphi_{N'} = 0$ ***bei einem singulären Punkte von*** $F_m = 0$ ***werden nach*** I. ***oder*** II. ***hergeleitet.*** Wenn bei einem solchen Punkte $x = a$ $F_M(s, x)$ in (5.) normal ist, so werden die Integrale von $F_M = 0$ bei demselben Punkte durch das mehrfache Integral No. 1 (9.) dargestellt. Werden die Integrale von $\Phi_N = 0$ und $\varphi_{N'} = 0$ bei diesem Punkte durch die mehrfachen Integrale No. 1 (11.) gebildet, und bildet man aus den mehrfachen Integralen für $\Phi_N = 0$, $F_M = 0$ und $\varphi_{N'} = 0$ gemäss dem Systeme (6.) ein Integral wie No. 1 (11.), so stellt diese Integralformel die m linearunabhängigen Integrale von $F_m = 0$ bei diesem Punkte dar; dieselben haben Entwickelungen der Form No. 1 (21.). Entsprechend bei $x = \infty$ vermittelst der Substitution $x = t^{-1}$. Kommt nun ein Integral von $F_m = 0$ in Betracht der Art, dass der Gruppenexponent in dessen Entwickelung sich nicht in den Entwickelungen der Integrale von $F_M = 0$ und $\varphi_{N'} = 0$ vorfindet, so muss dieses Integral sich durch die Integrale von $\Phi_N = 0$ mit demselben Gruppenexponenten ausdrücken lassen, die Behandlung desselben kommt demnach auf die Betrachtung dieser in dem Früheren untersuchten Differentialgleichung zurück.

Greifswald, den 27. Juli 1880.

Ueber algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten.

(Von Herrn *L. Königsberger* in Wien.)

Ich habe vor kurzem in diesem Journal einen Satz aufgestellt, nach welchem — um hier nur den einfachsten Fall zweier Differentialgleichungen zu erwähnen — eine algebraische Beziehung zwischen einem particulären Integrale einer beliebigen Differentialgleichung und einem particulären Integrale einer anderen, aber irreductibeln Differentialgleichung unverändert bleibt, wenn man in dieselbe ein *beliebiges* anderes particuläres Integral der irreductibeln Differentialgleichung und ein dazugehöriges anderes der ersteren Differentialgleichung substituirt — und von diesem Satze bereits Anwendungen auf die Aufstellung des *Abel*schen Theorems für Integrale von Differentialgleichungen, auf die Untersuchung der Irreductibilität von Differentialgleichungen und auf die Feststellung der Form der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer Differentialgleichungen gemacht. Bei einer Untersuchung, welche die algebraische Ausdrückbarkeit des allgemeinen Integrales einer Differentialgleichung durch particuläre Integrale derselben betrifft, brauchte ich eine Verallgemeinerung des oben ausgesprochenen Satzes, welche sich auf die Erhaltung der Form einer algebraischen Relation bezieht, die zwischen particulären Integralen verschiedener Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten statthat, und auf die Erweiterung des früher bewiesenen Satzes nach dieser Richtung hin und einige Anwendungen will ich im Folgenden näher eingehen.

Sei die eine der Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad F\left(x,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \dots\ \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

und eine andere *irreductible* Differentialgleichung in dem von mir im neun-

zigsten Bande dieses Journals angegebenen Sinne

$$(2.)\qquad f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \dots\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

und bestehe zwischen einem particulären Integrale z_1 der ersten, y_1 der zweiten und den Differentialquotienten dieses letzteren eine algebraische Beziehung, welche wir in die Form setzen wollen

$$(3.)\qquad z_1 = \varphi\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2},\ \dots\right),$$

so folgt durch Substitution von (3.) und den daraus hergeleiteten Beziehungen

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dx} = \varphi_1\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right),\quad \dfrac{d^2z_1}{dx^2} = \varphi_2\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right),\quad \dots \\ \qquad\qquad \dfrac{d^mz_1}{dx^m} = \varphi_m\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right) \end{cases}$$

in die Gleichung (1.) die Differentialgleichung in y_1:

$$(5.)\qquad \begin{cases} F\left\{x,\ \varphi\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right),\ \varphi_1\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right),\ \dots \right. \\ \qquad\qquad \left. \varphi_m\left(x,\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right)\right\} = 0. \end{cases}$$

Da nun die Gleichung (2.) als eine irreductible vorausgesetzt wurde, und diese mit (5.) eine Lösung y_1 gemein hat, so muss dieselbe nach einem von mir a. a. O. bewiesenen Satze alle Integrale mit derselben gemein haben, d. h. es muss die Gleichung (5.) wiederum erfüllt sein, wenn statt y_1 irgend ein anderes particuläres Integral y_2 der Differentialgleichung (2.) gesetzt wird. Sei nun z_2 der durch die Beziehung

$$(6.)\qquad z_2 = \varphi\left(x,\ y_2,\ \frac{dy_2}{dx},\ \frac{d^2y_2}{dx^2},\ \dots\right)$$

definirte Ausdruck, so werden auch die Gleichungen (4.) bestehen, wenn y_1 und z_1 zugleich durch y_2 und z_2 ersetzt werden und somit die Gleichung

$$(7.)\qquad \begin{cases} F\left\{x,\ \varphi\left(x,\ y_2,\ \dfrac{dy_2}{dx},\ \dots\right),\ \varphi_1\left(x,\ y_2,\ \dfrac{dy_2}{dx},\ \dots\right),\ \dots \right. \\ \qquad\qquad \left. \varphi_m\left(x,\ y_2,\ \dfrac{dy_2}{dx},\ \dots\right)\right\} = 0 \end{cases}$$

in

$$(8.)\qquad F\left(x,\ z_2,\ \frac{dz_2}{dx},\ \dots\ \frac{d^mz_2}{dx^m}\right) = 0$$

übergehen, d. h. es ist die durch die Gleichung (6.) bestimmte Function

ein Integral der Differentialgleichung (1.), oder anders ausgedrückt: es bleibt die Form der algebraischen Beziehung zwischen einem particulären Integrale der Differentialgleichung (1.) und einem particulären Integrale der irreductiblen Differentialgleichung (2.) und dessen Ableitungen erhalten, wenn man für das letztere Integral ein beliebiges anderes particuläres Integral von (2.), für das erstere ein zugehöriges bestimmtes anderes particuläres Integral der Gleichung (1.) substituirt.

So wird z. B. das particuläre Integral $z_1 = e^{2x} + e^x$ der Differentialgleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{dz}{dx} + 2z = 0$$

mit dem particulären Integrale $y_1 = e^x$ der irreductibeln Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y$$

in der algebraischen Beziehung stehen

$$z_1 = y_1^2 + y_1,$$

und man sieht sogleich, dass, wenn man für y_1 irgend ein anderes particuläres Integral $y_2 = me^x$ jener Differentialgleichung setzt, man nur für z_1 das particuläre Integral $z_2 = m^2 e^{2x} + me^x$ zu setzen braucht, damit wieder die Beziehung statthat

$$z_2 = y_2^2 + y_2.$$

Gehen wir nun zu dem allgemeineren Falle über, in welchem das Integral z_1 der Differentialgleichung (1.) und dessen Ableitungen mit dem Integrale y_1 der irreductibeln Differentialgleichung (2.) und dessen Ableitungen in der algebraischen Beziehung

$$(9.) \qquad \varphi\left(x,\; z_1,\; \frac{dz_1}{dx},\; \dots\; \frac{d^\mu z_1}{dx^\mu},\; y_1,\; \frac{dy_1}{dx},\; \dots\right) = 0$$

stehen, und werfen wir auch hier die Frage auf, wie es mit der Erhaltung der algebraischen Beziehung (9.) steht, wenn andere particuläre Integrale dieser Differentialgleichungen gewählt werden. Differentiirt man die Gleichung (1.) für $z = z_1$ μ-mal, die Gleichung (9.) m-mal, so erhält man $m+\mu+2$ Gleichungen, aus denen man die $m+\mu+1$ Grössen

$$(A) \qquad z_1,\; \frac{dz_1}{dx},\; \frac{d^2z_1}{dx^2},\; \dots\; \frac{d^{m+\mu}z_1}{dx^{m+\mu}}$$

eliminiren kann, und es wird das Eliminationsresultat eine Differentialgleichung in y_1 sein:

$$(10.)\qquad f_1\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2},\ \ldots\right) = 0,$$

welche bekanntlich wieder durch alle Integrale der Gleichung (2.) wird befriedigt werden müssen. Nehmen wir zuerst an, dass sich die Unbekannten (A) dieses algebraischen Eliminationsproblems als festbestimmte algebraische Functionen der im Eliminationsresultat vorkommenden Grössen

$$x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2},\ \ldots$$

ergeben, so dass

$$(11.)\qquad \begin{cases} z_1 = \omega\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots\right),\ \frac{dz_1}{dx} = \omega_1\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots\right), \\ \frac{d^2z_1}{dx^2} = \omega_2\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots\right),\ \ldots \end{cases}$$

ist, so werden die Gleichungen (1.) und (9.) in die algebraischen Differentialgleichungen in y_1

$$(12.)\qquad F\left\{x,\ \omega\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots\right),\ \ldots\ \omega_m\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots\right)\right\} = 0$$

und

$$(13.)\qquad \varphi\left\{x,\ \omega\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ldots\right),\ \ldots\ \omega_\mu\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ldots\right),\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ldots\right\} = 0$$

übergehen und somit auch bestehen, wenn y_2 statt y_1 gesetzt wird. Setzt man nun

$$(14.)\qquad \omega\left(x,\ y_2,\ \frac{dy_2}{dx},\ \ldots\right) = z_2,$$

so wird nothwendig auch

$$(15.)\qquad \omega_1\left(x,\ y_2,\ \frac{dy_2}{dx},\ \ldots\right) = \frac{dz_2}{dx},\quad \omega_2\left(x,\ y_2,\ \frac{dy_2}{dx},\ \ldots\right) = \frac{d^2z_2}{dx^2},\ \ldots$$

sein müssen, da nach (11.)

$$\omega_1\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots\right) = \frac{d}{dx}\,\omega\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \ldots\right)$$

als Differentialgleichung in y_1 auch durch y_2 erfüllt werden muss, und dasselbe gilt für die höheren Differentialquotienten. Daher werden sich die Gleichungen (12.) und (13.) in die Form bringen lassen

$$(16.)\qquad F\left(x,\ z_2,\ \frac{dz_2}{dx},\ \ldots\ \frac{d^mz_2}{dx^m}\right) = 0$$

und

$$(17.)\qquad \varphi\left(x,\ z_2,\ \frac{dz_2}{dx},\ \ldots\ \frac{d^\mu z_2}{dx^\mu},\ y_2,\ \frac{dy_2}{dx},\ \ldots\right) = 0,$$

und wir finden also auch hier, dass, wenn man für y_1 ein beliebiges anderes particuläres Integral in die zwischen den Integralen und ihren Ableitungen bestehende Beziehung (9.) setzt, diese Beziehung erhalten bleibt, wenn man nur für z_1 ein anderes bestimmtes particuläres Integral der Differentialgleichung (1.) substituirt.

Aber es ist nicht nöthig, dass alle jene zur Elimination der Grössen (A) verwandten Differentialgleichungen von einander unabhängig sind, so dass sich z_1 als algebraische Function von y_1 und dessen Ableitungen ergiebt, sondern es kann der algebraische Eliminationsprocess wieder nur auf Gleichungen zwischen z_1 und y_1 und den Ableitungen dieser beiden Functionen führen. Sei z. B. die Differentialgleichung

$$(18.)\qquad \frac{d^2z}{dx^2}+\frac{dz}{dx}(2x-1)-2z(x-1) = 0$$

gegeben mit dem particulären Integral

$$(19.)\qquad z_1 = e^{-x^2}\int e^{x^2+x}\,dx,$$

so wird dieses mit dem particulären Integrale $y_1 = e^x$ der irreductibeln Differentialgleichung

$$(20.)\qquad \frac{dy}{dx} = y,$$

wie unmittelbar zu sehen, in der Beziehung stehen

$$(21.)\qquad \frac{dz_1}{dx}+2xz_1 = y_1.$$

Differentiirt man nun die Gleichung (18.) einmal, so folgt für $z = z_1$

$$(22.)\qquad \frac{d^3z_1}{dx^3}+\frac{d^2z_1}{dx^2}(2x-1)-2\frac{dz_1}{dx}(x-2)-2z_1 = 0,$$

und differentiirt man (21.) zweimal, so ergiebt sich

$$(23.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx^2}+2x\frac{dz_1}{dx}+2z_1 = \frac{dy_1}{dx}$$

und

$$(24.)\qquad \frac{d^3z_1}{dx^3}+2x\frac{d^2z_1}{dx^2}+4\frac{dz_1}{dx} = \frac{d^2y_1}{dx^2};$$

eliminirt man nun aus (22.) und (24.) die Grösse $\frac{d^3z_1}{dx^3}$, so folgt

$$(25.)\qquad \frac{d^2z_1}{dx^2}+2x\frac{dz_1}{dx}+2z_1 = \frac{d^2y_1}{dx^2},$$

und stellt man (25.) mit (23.) zusammen, so folgt

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{dy_1}{dx},$$

oder stellt man dieselbe mit (18.) zusammen, so ergiebt sich

$$\frac{dz_1}{dx} + 2x z_1 = \frac{d^2 y_1}{dx^2},$$

welche mit (21.) verbunden, wiederum nur eine Gleichung in y_1

$$y_1 = \frac{d^2 y_1}{dx^2}$$

liefert, ohne z_1 und dessen Ableitungen als algebraische Functionen von y_1 und den Ableitungen auszudrücken. In der That kann z_1, welches durch (19.) definirt ist, nicht als algebraische Function von $e^x = y_1$ dargestellt werden.

Um daher die Richtigkeit jenes allgemeinen Satzes, den wir in dieser Arbeit feststellen wollen, zu erweisen, müssen wir den Eliminationsprocess selbst genauer verfolgen. Werde die Differentialgleichung (1.) in der Form dargestellt

$$(26.)\quad \frac{d^m z_1}{dx^m} = \mathfrak{F}\left(x,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx},\ \dots\ \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}}\right),$$

und sei

$$(27.)\quad \frac{d^{m+\varrho} z_1}{dx^{m+\varrho}} = \varphi\left(x,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx},\ \dots\ \frac{d^{m+\varrho-1} z_1}{dx^{m+\varrho-1}},\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \dots\right)$$

die algebraische Beziehung zwischen z_1, y_1 und deren Ableitungen, worin ϱ eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null bedeuten kann. Ist ϱ Null oder positiv ganz, so ersetze man in der Gleichung (27.) vermöge der Gleichung (26.) und deren Differentialquotienten alle Ableitungen von einer höheren Ordnung als der $(m-1)^{\text{ten}}$ durch die niedrigeren, so dass die Gleichung (27.) in

$$(28.)\quad \frac{d^{m-1} z_1}{dx^{m-1}} = \Phi\left(x,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx},\ \dots\ \frac{d^{m-2} z_1}{dx^{m-2}},\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \dots\right)$$

übergeht; würde hierbei z_1 mit seinen $m-1$ ersten Ableitungen herausfallen, so würde dies bedeuten, dass, weil das Resultat der Elimination wieder für jedes particuläre Integral der Differentialgleichung (2.) bestehen muss, jedes particuläre Integral von (2.) mit jedem particulären Integrale von (1.) verbunden der Beziehung (27.) genügen muss. Ist aber ϱ negativ ganz, so werden wir statt (27.) schreiben können

$$(29.)\quad \frac{d^{m-\alpha} z_1}{dx^{m-\alpha}} = \Phi\left(x,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx},\ \dots\ \frac{d^{m-\alpha-1} z_1}{dx^{m-\alpha-1}},\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \dots\right),$$

so dass die beiden Fälle zu gleicher Zeit behandelt werden können, indem man für den ersten Fall nur $\alpha = 1$ zu setzen hat. Differentiirt man die Gleichung (29.) α-mal hinter einander, so folgt

$$(30.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{m-\alpha+1}z_1}{dx^{m-\alpha+1}} = \Phi_1\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\alpha}z_1}{dx^{m-\alpha}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right), \\ \dfrac{d^{m-\alpha+2}z_1}{dx^{m-\alpha+2}} = \Phi_2\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\alpha+1}z_1}{dx^{m-\alpha+1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^{m}z_1}{dx^{m}} = \Phi_\alpha\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-1}z_1}{dx^{m-1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right), \end{cases}$$

und daher nach (26.):

$$(31.)\quad \begin{cases} \Phi_\alpha\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-1}z_1}{dx^{m-1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right) \\ \qquad = \mathfrak{F}\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-1}z_1}{dx^{m-1}}\right). \end{cases}$$

Setzt man in die Gleichung (31.) die aus den Gleichungen (29.) und (30.) entnommenen Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{d^{m-\alpha}z_1}{dx^{m-\alpha}},\quad \frac{d^{m-\alpha+1}z_1}{dx^{m-\alpha+1}},\quad \frac{d^{m-\alpha+2}z_1}{dx^{m-\alpha+2}},\quad \dots\quad \frac{d^{m-1}z_1}{dx^{m-1}},$$

so wird dieselbe übergehen in

$$(32.)\quad \frac{d^{m-\beta}z_1}{dx^{m-\beta}} = \Psi\left(x,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx},\ \dots\ \frac{d^{m-\beta-1}z_1}{dx^{m-\beta-1}},\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \dots\right),$$

worin $\beta \leqq \alpha - 1$, und bildet man wieder durch successive Differentiation

$$(33.)\quad \begin{cases} \dfrac{d^{m-\beta+1}z_1}{dx^{m-\beta+1}} = \Psi_1\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\beta}z_1}{dx^{m-\beta}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{d^{m-\alpha}z_1}{dx^{m-\alpha}} = \Psi_{\beta-\alpha}\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\alpha-1}z_1}{dx^{m-\alpha-1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right), \end{cases}$$

so folgt aus der letzten dieser Gleichungen und (29.)

$$(34.)\quad \begin{cases} \Psi_{\beta-\alpha}\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\alpha-1}z_1}{dx^{m-\alpha-1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right) \\ = \Phi\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\alpha-1}z_1}{dx^{m-\alpha-1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right); \end{cases}$$

setzt man in diese Gleichung die aus (32.) und (33.) entnommenen Werthe der Differentialquotienten, so erhält man

$$(35.)\quad \frac{d^{m-\gamma}z_1}{dx^{m-\gamma}} = X\left(x,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx},\ \dots\ \frac{d^{m-\gamma-1}z_1}{dx^{m-\gamma-1}},\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \dots\right),$$

worin $\gamma \leqq \beta - 1$ ist. Bildet man durch Differentiation aus dieser Gleichung wiederum die folgenden

$$(36.) \quad \begin{cases} \dfrac{d^{m-\gamma+1} z_1}{dx^{m-\gamma+1}} = X_1\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\gamma} z_1}{dx^{m-\gamma}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right), \\ \cdot \\ \dfrac{d^{m-\beta} z_1}{dx^{m-\beta}} = X_{\gamma-\beta}\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\beta-1} z_1}{dx^{m-\beta-1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right), \end{cases}$$

so ergiebt sich

$$(37.) \quad \begin{cases} X_{\gamma-\beta}\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\beta-1} z_1}{dx^{m-\beta-1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right) \\ = \Psi\left(x,\ z_1,\ \dfrac{dz_1}{dx},\ \dots\ \dfrac{d^{m-\beta-1} z_1}{dx^{m-\beta-1}},\ y_1,\ \dfrac{dy_1}{dx},\ \dots\right), \end{cases}$$

und setzt man die Werthe der Differentialquotienten aus den Gleichungen (35.) und (36.) in diese Gleichung ein, so mögen z_1 und dessen Ableitungen sämmtlich herausfallen, und sich das Eliminationsresultat ergeben

$$(38.) \quad f_1\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \dots\right) = 0,$$

dann wird der so vollzogene Eliminationsprocess offenbar den allgemeinsten Fall darstellen. Verfahren wir z. B. so in dem oben behandelten Beispiel, so folgt aus (21.) durch Differentiation (23.) und aus (18.) und (23.) durch Elimination von $\frac{d^2 z}{dx^2}$ die Gleichung

$$\frac{dz_1}{dx} + 2xz_1 = \frac{dy_1}{dx},$$

und durch Gleichsetzen des Werthes von $\frac{dz_1}{dx}$ mit dem durch (21.) bestimmten

$$y_1 = \frac{dy_1}{dx}.$$

Sei nun y_2 irgend ein anderes particuläres Integral der irreductibeln Differentialgleichung (2.), und sei z_2 ein particuläres Integral der Differentialgleichung (35.), wenn in dieser y_1 durch y_2 ersetzt ist, so werden auch die Beziehungen (36.) für y_2 und z_2 bestehen, und es wird daher die Gleichung (37.) befriedigt werden, wenn man y_2 und z_2 statt y_1 und z_1 substituirt, da die durch die transformirten Gleichungen (35.) und (36.) definirten Differentialquotienten in (37.) eingesetzt

$$f\left(x,\ y_2,\ \frac{dy_2}{dx},\ \dots\right)$$

liefern, welches identisch Null sein muss. Es folgt daher aus der letzten der Gleichungen (36.) und der Gleichung (37.), dass

$$\frac{d^{m-\beta} z_2}{dx^{m-\beta}} = \Psi\left(x,\; z_2,\; \frac{dz_2}{dx},\; \ldots\; \frac{d^{m-\beta-1} z_2}{dx^{m-\beta-1}},\; y_2,\; \frac{dy_2}{dx},\; \ldots\right),$$

oder dass die Gleichung (32.) noch bestehen bleibt, wenn y_1 und z_1 durch y_2 und z_2 ersetzt werden. Da nun (32.) und die daraus hergeleiteten Gleichungen (33.) bestehen, so wird auch (34.) gültig bleiben, weil die Substitution dieser Differentialquotienten in (34.) die transformirte Gleichung (35.) identisch befriedigt, und wir finden daher wieder, dass auch die Gleichung (29.) für y_2 und z_2 besteht; endlich folgt aus (29.) und (30.) vermöge der Gültigkeit von (32.), dass z_2 ein particuläres Integral der gegebenen Differentialgleichung (26.) ist, und da die Gleichung (29.) die zwischen den Integralen und deren Ableitungen bestehende algebraische Beziehung ausdrückte, so folgt die allgemeine Gültigkeit des nachstehenden Satzes:

Findet zwischen einem particulären Integrale einer beliebigen Differentialgleichung und einer Reihe von Ableitungen desselben und einem particulären Integrale einer irreductibeln Differentialgleichung und einer Anzahl von Ableitungen dieses eine algebraische Beziehung statt, so bleibt diese bestehen, wenn für das Integral der irreductibeln Differentialgleichung ein beliebiges anderes particuläres Integral gesetzt wird, vorausgesetzt dass für das Integral der anderen Differentialgleichung ein bestimmtes anderes substituirt wird.

So wird in dem obigen Beispiel irgend ein anderes particuläres Integral der Gleichung (20.) durch $y_2 = \lambda e^x$ ausgedrückt sein, worin λ eine Constante bedeutet, und man sieht, dass dann

$$z_2 = \lambda e^{-x^2} \int e^{x^2+x} dx$$

mit y_2 in derselben Beziehung (21.) stehen wird.

Wir wollen eine Anwendung des oben bewiesenen Satzes auf die Form der Beziehungen machen, welche zwischen den particulären Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung und den Differentialquotienten derselben bestehen können, schicken jedoch eine kurze Untersuchung der Frage voraus, ob es überhaupt irreductible lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung giebt, und wie diese beschaffen sind.

Sei

$$(39.)\qquad \frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy = 0$$

die zu behandelnde Differentialgleichung zweiter Ordnung, so folgt unmittelbar, dass, wenn dieselbe irreductibel sein soll und die beiden Fundamentalintegrale mit y_1 und y_2 bezeichnet werden, zwischen eben diesen eine algebraische Beziehung nicht stattfinden kann; denn sei

$$y_2 = f(x, y_1),$$

so folgt aus

$$\frac{dy_2}{dx} = \frac{\partial f(x,y_1)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx},$$

$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{\partial^2 f(x,y_1)}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f(x,y_1)}{\partial x\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial^2 f(x,y_1)}{\partial y_1^2}\left(\frac{dy_1}{dx}\right)^2+\frac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1}\frac{d^2y_1}{dx^2},$$

dass vermöge der Gleichung (39.)

$$(40.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f(x,y_1)}{\partial y_1^2}\left(\dfrac{dy_1}{dx}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 f(x,y_1)}{\partial x\,\partial y_1}\dfrac{dy_1}{dx} \\ -Qy_1\dfrac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1}+\dfrac{\partial^2 f(x,y_1)}{\partial x^2}+P\dfrac{\partial f(x,y_1)}{\partial x}+Qf(x,y_1)=0, \end{cases}$$

und somit y_1 einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung genügen würde, wenn nicht

$$\frac{\partial^2 f(x,y_1)}{\partial y_1^2}=\frac{\partial^2 f(x,y_1)}{\partial x\partial y_1}=0,$$

d. h. wenn nicht $\frac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1}$ eine von x und y_1 unabhängige Constante ist; es würde somit $f(x,y_1)=Ky_1+L$ sein, worin K eine Constante, L eine algebraische Function von x ist, und daher L ebenfalls ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung sein, was, da L eine algebraische Function von x und die Differentialgleichung irreductibel sein sollte, nicht angeht.

Nehmen wir nun an, die Gleichung (39.) sei nicht irreductibel, wobei jedoch der Fall, dass die beiden particulären Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander stehen, ausgeschlossen werden soll, und genüge eines ihrer Integrale Y_1, welches nicht algebraisch sein soll, einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(41.)\qquad F\left(x,\, y,\, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad\text{oder}\quad \frac{dy}{dx}=\varphi(x,\, y).$$

Stellt man die Gleichung (41.) mit dem nach x genommenen Differentialquotienten derselben

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial\varphi(x,\ y)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,\ y)}{\partial y}\varphi(x,\ y)$$

zusammen, so folgt, da Y_1 ein den Gleichungen (39.) und (41.) gemeinsames Integral sein sollte,

$$(42.)\quad \frac{\partial\varphi(x,\ Y_1)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x,\ Y_1)}{\partial Y_1}\varphi(x,\ Y_1) + P\varphi(x,\ Y_1) + QY_1 = 0.$$

Da nun Y_1 nicht eine algebraische Function von x sein sollte, so wird die Gleichung (42.) eine in Y_1 identische sein müssen, oder anders ausgedrückt, wenn man mit Y_2 irgend ein anderes particuläres Integral der Gleichung (41.) bezeichnet, so wird dieses auch der Differentialgleichung genügen

$$\frac{d^2Y_2}{dx^2} + P\frac{dY_2}{dx} + QY_2 = 0,$$

d. h. alle Integrale von (41.) sind auch Integrale der Differentialgleichung (39.).

Seien nun y_1 und y_2 zwei particuläre Fundamentalintegrale von (39.), so wird das allgemeine Integral von (41.), da es auch (39.) genügen muss, nothwendig die Form haben

$$(43.)\quad Y = My_1 + Ny_2,$$

worin M und N Functionen der Integrationsconstanten c sind. Sei nun

$$(44.)\quad Y_1 = M_1y_1 + N_1y_2 \quad \text{und} \quad Y_2 = M_2y_1 + N_2y_2,$$

so wird allgemein

$$(45.)\quad Y = RY_1 + SY_2$$

sein, worin R und S Functionen von c sind, vorausgesetzt, dass nicht

$$M_1N_2 - M_2N_1 = 0$$

ist; aber diese Voraussetzung darf unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung gemacht werden, da, wenn im entgegengesetzten Falle dies stets stattfindet, $Y_2 = \varkappa Y_1$ für jedes $\varkappa$ und daraus die Form der Differentialgleichung (41.)

$$(46.)\quad \frac{dy}{dx} = y\psi(x)$$

folgen würde, worauf wir gleich nachher zurückkommen.

Aus (45.) würde nun vermöge der Gleichung (40.) sich ergeben:

$$(47.)\quad \varphi(x,\ RY_1 + SY_2) = R\varphi(x,\ Y_1) + S\varphi(x,\ Y_2);$$

nun darf aber Y_2 nicht eine algebraische Function von Y_1 sein, da sonst

$$(48.)\qquad M_2 y_1 + N_2 y_2 = \psi(M_1 y_1 + N_1 y_2)$$

eine in y_1 und y_2 identische Gleichung sein müsste — der Fall, dass y_2 algebraisch durch y_1 ausdrückbar ist, war bereits oben ausgeschlossen — und die Differentiation der Gleichung (48.) nach y_1 und y_2

$$M_1\psi' = M_2,\quad N_1\psi' = N_2 \quad \text{oder} \quad M_1 N_2 - M_2 N_1 = 0 \quad \text{und} \quad \psi' = \text{const.}$$

ergiebt, was wiederum gegen die oben gemachte Annahme verstösst. Die somit in Y_1 und Y_2 sowie in der Integrationsconstanten c identische Gleichung (47.) liefert nun durch successive Differentiation nach Y_1 und Y_2

$$\frac{\partial\varphi(x, RY_1+SY_2)}{\partial(RY_1+SY_2)} = \frac{\partial\varphi(x, Y_1)}{\partial Y_1} = \frac{\partial\varphi(x, Y_2)}{\partial Y_2}$$

und daher

$$(49.)\qquad \varphi(x, Y_1) = \psi(x).Y_1 + \chi(x),$$

wenn $\psi(x)$ und $\chi(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten, worin, da mit Hülfe der Gleichung (47.)

$$\chi(x) = (R+S)\chi(x)$$

folgt, entweder $\chi(x) = 0$ oder $R+S = 1$ ist. Jedenfalls muss also die Differentialgleichung (41.) die Gestalt haben

$$(50.)\qquad \frac{dy}{dx} = \psi(x).y + \chi(x),$$

worin also auch die Form der Gleichung (46.) inbegriffen ist. ***Ist somit eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Fundamentalintegrale nicht in algebraischer Beziehung zu einander stehen, nicht irreductibel, so muss das Integral, welches sie mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung gemein hat, einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung angehören, und zwar werden alle Integrale der letzteren auch Integrale der gegebenen Differentialgleichung zweiter Ordnung sein.***

Daraus können wir nun aber schliessen, dass alle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Integrale nicht in der Form der Integrale der Gleichung (50.), d. h. in der Form

$$c e^{\int\psi(x)dx} + e^{\int\psi(x)dx}\int e^{-\int\psi(x)dx}\chi(x)\,dx$$

enthalten sind, irreductibel sein werden; so wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Perioden der elliptischen Integrale erster Gattung

$$\varkappa(1-\varkappa^2)\frac{d^2\Omega}{d\varkappa^2} + (1-3\varkappa^2)\frac{d\Omega}{d\varkappa} - \varkappa\Omega = 0$$

eine irreductible, weil

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{x}{x_1^2}\,\Omega - \frac{x}{x_1^2}\,E = \psi(x)\Omega + \chi(x)$$

sein müsste, und E nicht durch Ω linear mit in x algebraischen Coefficienten ausdrückbar ist.

Nachdem die Existenz von irreductibeln Differentialgleichungen zweiter Ordnung und die Beschaffenheit derselben festgestellt worden, werfen wir die Frage auf, von welcher Form die zwischen zwei particulären Fundamentalintegralen und deren ersten Differentialquotienten etwa bestehenden algebraischen Beziehungen sein müssen, wenn die Differentialgleichung zweiter Ordnung als irreductibel vorausgesetzt wird.

Es mögen zuerst die Relationen untersucht werden, in die nur ausser den beiden particulären Integralen und der unabhängigen Variabeln die erste Ableitung des einen dieser Integrale eintritt, also Beziehungen von der Form

$$(51.)\qquad y_2 = f(x,\ y_1,\ y_1').$$

Nach dem oben bewiesenen Satze von der Erhaltung der algebraischen Beziehung wird die Gleichung (51.) bestehen bleiben, wenn wir $\mu_1 y_1$ statt y_1 setzen, vorausgesetzt dass $m_1 y_1 + m_2 y_2$ statt y_2 substituirt wird, worin m_1 und m_2 von der willkürlichen Constanten μ_1 abhängige Constanten bedeuten; es ist somit auch

$$(52.)\qquad m_1 y_1 + m_2 y_2 = f(x,\ \mu_1 y_1,\ \mu_1 y_1')$$

oder

$$(53.)\qquad m_1 y_1 + m_2 f(x,\ y_1,\ y_1') = f(x,\ \mu_1 y_1,\ \mu_1 y_1'),$$

welche Gleichung wegen der Irreductibilität der vorgelegten Differentialgleichung zweiter Ordnung eine in y_1 und y_1' identische sein muss. Differentiirt man dieselbe nach y_1 und y_1', so folgt

$$\mu_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1')}{\partial \mu_1 y_1} = m_1 + m_2 \frac{\partial f(x, y_1, y_1')}{\partial y_1},$$

$$\mu_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1')}{\partial \mu_1 y_1'} = m_2 \frac{\partial f(x, y_1, y_1')}{\partial y_1'},$$

und differentiirt man nach μ_1, so ergiebt sich

$$y_1 \frac{\partial f(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1')}{\partial \mu_1 y_1} + y_1' \frac{\partial f(x, \mu_1 y_1, \mu_1 y_1')}{\partial \mu_1 y_1'} = y_1 \frac{dm_1}{d\mu_1} + f(x,\ y_1,\ y_1') \frac{dm_2}{d\mu_1},$$

und hieraus vermöge der beiden letzten Gleichungen

$$(54.)\qquad y_1 \frac{\partial f(x, y_1, y_1')}{\partial y_1} + y_1' \frac{\partial f(x, y_1, y_1')}{\partial y_1'} = af(x,\ y_1,\ y_1') + by_1,$$

worin a und b Constanten bedeuten.

Da diese Gleichung wieder wegen der Irreductibilität der Differentialgleichung zweiter Ordnung eine in y_1 und y'_1 identische sein muss, so können wir sie als eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den beiden unabhängigen Variabeln y_1 und y'_1 und der abhängigen $f(x, y_1, y'_1)$ betrachten und erhalten zum Zwecke der Integration das System gleichzeitiger totaler Differentialgleichungen

$$\frac{dy_1}{y_1} = \frac{dy'_1}{y'_1} = \frac{df}{af+by_1},$$

deren vollständige Integrale

$$y'_1 = \alpha y_1, \quad f = c y_1^a - \frac{b}{a-1} y_1$$

sind, und man findet daher als allgemeines Integral der partiellen Differentialgleichung (54.)

$$(55.) \qquad f(x, y_1, y'_1) = y_1^a \varphi\left(\frac{y'_1}{y_1}\right) - \frac{b}{a-1} y_1,$$

worin φ eine willkürliche algebraische Function bedeutet, in die die unabhängige Variable x beliebig eintreten darf; setzt man diesen Ausdruck in Gleichung (53.) ein, so folgt leicht

$$m_2 = \mu_1^a, \quad m_1 = \frac{b\mu_1}{a-1} \mu_1^{a-1} - 1,$$

und man sieht aus der Bedeutung von a und b unmittelbar, dass diese Constanten numerische, d. h. nicht von μ_1 abhängige sind; die allgemeinste Beziehung (51.) ist somit in der Form

$$(56.) \qquad y_2 = y_1^a \varphi\left(\frac{y'_1}{y_1}\right) - \frac{b}{a-1} y_1$$

enthalten.

Soll endlich die Form der Beziehung

$$(57.) \qquad F(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2) = 0 \quad \text{oder} \quad y'_2 = f(x, y_1, y_2, y'_1)$$

näher untersucht werden, so darf angenommen werden, dass nicht schon zwischen y_1, y_2 und einer der Ableitungen y'_1, y'_2 eine algebraische Beziehung stattfindet, weil sonst mit Hülfe dieser Beziehung eine jener Ableitungen aus (57.) eliminirt und nach dem Früheren die Form der algebraischen Beziehung festgestellt werden könnte. Ersetzt man in (57.) y_1 durch $\mu_1 y_1$, also y_2 durch $m_1 y_1 + m_2 y_2$, worin μ_1 eine willkürliche, m_1 und m_2 von dieser abhängige Constanten bedeuten, so folgt

$$(58.) \qquad m_1 y'_1 + m_2 f(x, y_1, y_2, y'_1) = f(x, \mu_1 y_1, m_1 y_1 + m_2 y_2, \mu_1 y'_1),$$

und da diese Gleichung der Annahme gemäss eine in y_1, y_2, y'_1 identische

sein muss, so folgt durch Differentiation nach diesen Grössen

$$\frac{\partial f(x,\mu_1 y_1, m_1 y_1+m_2 y_2, \mu_1 y'_1)}{\partial \mu_1 y_1}\mu_1+\frac{\partial f(x,\mu_1 y_1, m_1 y_1+m_2 y_2, \mu_1 y'_1)}{\partial(m_1 y_1+m_2 y_2)}\cdot m_1$$

$$= m_2\frac{\partial f(x,y_1,y_2,y'_1)}{\partial y_1},$$

$$\frac{\partial f(x,\mu_1 y_1, m_1 y_1+m_2 y_2, \mu_1 y'_1)}{\partial(m_1 y_1+m_2 y_2)}m_2 = m_2\frac{\partial f(x,y_1,y_2,y'_1)}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial f(x,\mu_1 y_1, m_1 y_1+m_2 y_2, \mu_1 y'_1)}{\partial \mu_1 y'_1}\mu_1 = m_1+m_2\frac{\partial f(x,y_1,y_2,y'_1)}{\partial y'_1},$$

und differentiirt man (58.) nach μ_1, so folgt vermöge der eben erhaltenen drei Beziehungen, wenn $f(x,y_1,y_2,y'_1)$ kurz mit f bezeichnet wird,

$$\frac{m_2}{\mu_1}\frac{\partial f}{\partial y_1}y_1-\frac{m_1}{\mu_1}\frac{\partial f}{\partial y_2}y_1+\frac{\partial f}{\partial y_2}\left[y_1\frac{dm_1}{d\mu_1}+y_2\frac{dm_2}{d\mu_1}\right]+\frac{m_1}{\mu_1}y'_1+\frac{m_2}{\mu_1}\frac{\partial f}{\partial y'_1}y'_1$$

$$= y'_1\frac{dm_1}{d\mu_1}+f\frac{dm_2}{d\mu_1}.$$

oder

$$(59.)\qquad y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+(ay_1+by_2)\frac{\partial f}{\partial y_2}+y'_1\frac{\partial f}{\partial y'_1} = Ay'_1+Bf,$$

worin a, b, A, B Constanten bedeuten. Das zugehörige System totaler Differentialgleichungen

$$\frac{dy_1}{y_1}=\frac{dy_2}{ay_1+by_2}=\frac{dy'_1}{y'_1}=\frac{df}{Ay'_1+Bf}$$

liefert die Integrale:

$$y'_1=\alpha y_1,\quad y_2=\beta y_1^b-\frac{ay_1}{b-1},\quad f=\gamma y_1'^B-\frac{Ay'_1}{B-1}$$

und somit das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichung (59.):

$$(60.)\qquad f=y_1'^B\varphi\left\{\frac{y'_1}{y_1},\ \left(y_2+\frac{ay_1}{b-1}\right)y_1^{-b}\right\}-\frac{Ay'_1}{B-1}=y'_2,$$

worin φ eine willkürliche algebraische Function bedeutet, und dies ist die allgemeinste Form einer algebraischen Beziehung zwischen y_1, y_2, y'_1, y'_2, in der a, b, A, B Constanten bedeuten, und wobei in die Function φ die unabhängige Variable x eintreten darf.

Schliesslich mag noch ein Beispiel für die Form der Relation (60.) hinzugefügt werden. Bekanntlich existirt für die linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (29.) die Beziehung

$$y_1y'_2-y_2y'_1 = ce^{-\int P dx},$$

worin c eine Constante bedeutet; nehmen wir nun an, es sei

$$P = -\frac{d \log P_1}{dx},$$

worin P_1 eine algebraische Function von x bedeutet, so wird jene Beziehung

$$y_1 y_2' - y_2 y_1' = c P_1$$

zur Klasse der von uns untersuchten gehören; in der That wird, wenn in (60.)

$$A = a = 0, \quad B = b = -1$$

gesetzt wird, diese Beziehung in

$$y_2' = \frac{1}{y_1'} \varphi \left\{ \frac{y_1'}{y_1}, \; y_2 y_1 \right\}$$

übergehen, und nimmt man die willkürliche Function

$$\varphi(t, u) = t^2 u + c P_1 t,$$

so folgt:

$$y_2' = \frac{1}{y_1'} \left(\frac{y_1'^2}{y_1^2} y_2 y_1 + c \frac{P_1 y_1'}{y_1} \right) = \frac{y_1'}{y_1} y_2 + \frac{c P_1}{y_1},$$

oder

$$y_1 y_2' - y_1' y_2 = c P_1.$$

Wien, den 28. December 1880.

Ueber mehrfache Integrale, welche durch eine Transformation der Variabeln ihre Gestalt nicht ändern.

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.)

Im 15. Bande dieses Journals (S.S. 193—198) hat *Jacobi* zwei merkwürdige Theoreme über eine gewisse Classe von Doppelintegralen mitgetheilt, welche nach Einführung von neuen Veränderlichen in ihre ursprüngliche Gestalt zurückkehren. Im Anschlusse an diese Abhandlung hat Herr *Rosenhain* im 40. Bande S. 358 die Vermuthung ausgesprochen, dass analoge Sätze auch für mehrfache Integrale gelten müssten: für dreifache Integrale habe er solche durch allerdings weitläufige Rechnungen noch verificiren können. Die folgende Note giebt, die fragliche Vermuthung vollständig bestätigend, den Beweis des folgenden Theorems:

*Zwischen m Veränderlichen $x_1, x_2, \dots x_m$ mögen **eine** homogene Gleichung zweiten Grades und $m-2$ homogene lineare Gleichungen bestehen:*

$$(1.)\qquad f \equiv a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{mm}x_m^2 = 0,$$

$$(1^a.)\qquad \begin{cases} v \equiv v_1x_1+v_2x_2+\cdots+v_mx_m = 0, \\ w \equiv w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_mx_m = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t \equiv t_1x_1+t_2x_2+\cdots+t_mx_m = 0. \end{cases}$$

In beliebigen $m-2$ dieser Relationen seien die Coefficienten $a_{ik}, v_k, \dots t_k$ $(i, k = 1, 2, \dots m)$ homogene Functionen ersten Grades, in der $(m-1)^{ten}$ übrigen dagegen homogene Functionen zweiten Grades von m anderen Veränderlichen $y_1, y_2, \dots y_m$, so dass die Gleichungen (1.) und (1^a.), in passende Reihenfolge gebracht, bei der Anordnung nach Potenzen der y_k in der Gestalt sich darstellen lassen:

$$(2.)\quad \begin{cases} \mathfrak{v}_1 y_1 + \mathfrak{v}_2 y_2 + \cdots + \mathfrak{v}_m y_m = 0, \\ \mathfrak{w}_1 y_1 + \mathfrak{w}_2 y_2 + \cdots + \mathfrak{w}_m y_m = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \mathfrak{t}_1 y_1 + \mathfrak{t}_2 y_2 + \cdots + \mathfrak{t}_m y_m = 0, \\ \mathfrak{a}_{11} y_1^2 + 2\mathfrak{a}_{12} y_1 y_2 + \cdots + \mathfrak{a}_{mm} y_m^2 = 0. \end{cases}$$

Nimmt man ferner zwischen den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_m$, sowie $y_1, y_2, \ldots y_m$ zwei willkürliche Beziehungen an:

$$(3.)\quad \mathfrak{P}(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0, \quad P(y_1, y_2, \ldots y_n) = 0,$$

derart, dass $\mu P + 1$ (resp. $\nu \mathfrak{P} + 1$) eine homogene Function μ^{ten} (resp. ν^{ten}) Grades der $y_1, y_2, \ldots y_m$ (resp. $x_1, x_2, \ldots x_m$) repräsentirt, so wird mit Einführung der Zeichen

$$(4.)\quad \begin{cases} A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & v_1 & \ldots & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & v_2 & \ldots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm} & v_m & \ldots & t_m \\ v_1 & v_2 & \ldots & v_m & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}, \\[2ex] \mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{11} & \mathfrak{a}_{12} & \ldots & \mathfrak{a}_{1m} & \mathfrak{v}_1 & \ldots & \mathfrak{t}_1 \\ \mathfrak{a}_{21} & \mathfrak{a}_{22} & \ldots & \mathfrak{a}_{2m} & \mathfrak{v}_2 & \ldots & \mathfrak{t}_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{a}_{m1} & \mathfrak{a}_{m2} & \ldots & \mathfrak{a}_{mm} & \mathfrak{v}_m & \ldots & \mathfrak{t}_m \\ \mathfrak{v}_1 & \mathfrak{v}_2 & \ldots & \mathfrak{v}_m & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathfrak{t}_1 & \mathfrak{t}_2 & \ldots & \mathfrak{t}_m & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} \end{cases}$$

für eine beliebige Function U der Integrationsveränderlichen das $(m-1)$-fache Integral:

$$(4^a.)\quad J = \int\!\!\int\!\ldots\!\int \frac{U\,dy_1\,dy_2\ldots dy_{m-1}}{P'(y_m)\sqrt{A}}$$

unter Vermittelung der Beziehungen von (1.)—(3.) *übergeführt in*

$$(4^b.)\quad J = \int\!\!\int\!\ldots\!\int \frac{U\,dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-1}}{\mathfrak{P}'(x_m)\sqrt{\mathfrak{A}}}.$$

Beweis. Bekanntlich ist nach dem Fundamentaltheoreme über Transformation mehrfacher Integrale:

$$(5.)\quad J = \int\int\cdots\int \frac{U\left(\Sigma\pm\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_{m-1}}\right)}{P'(y_m)\sqrt{A}}dx_1\,dx_2\ldots dx_{m-1},$$

worin rechter Hand die Grössen y_i durch ihre Werthe in den x_i aus (2.) und (3.) zu ersetzen wären. Zu diesem Behufe denken wir uns zunächst vermöge der Relationen (3.) y_m (resp. x_m) als Function von $y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ (resp. $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$) dargestellt, so dass mit Rücksicht auf die Gleichungen in (1.) und (1^a.) ist*):

$$(6.)\quad \begin{cases} (-1)^{m-1}.\Sigma\pm\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_{m-1}}\right) \\ = \Sigma\pm(f'(x_1)v'(x_2)\ldots t'(x_{m-1})):\Sigma\pm(f'(y_1)v'(y_2)\ldots t'(y_{m-1})), \end{cases}$$

worin

$$(6^a.)\quad \begin{cases} f'(y_p) = \frac{\partial f}{\partial y_p}+\frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_p}, \\ f'(x_p) = \frac{\partial f}{\partial x_p}+\frac{\partial f}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_p}. \end{cases}\quad (p = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1)$$

Setzt man den Nenner rechter Hand in (6.) der Kürze wegen gleich D, d. h.

$$\Sigma\pm(f'(y_1)v'(y_2)\ldots t'(y_{m-1})) = D,$$

so kann nach (6^a.) D in die Form gebracht werden:

$$D = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1}+\frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_1}, & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial f}{\partial y_m} \\ \frac{\partial v}{\partial y_1}+\frac{\partial v}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_1}, & \cdots & \frac{\partial v}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial v}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial v}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial t}{\partial y_1}+\frac{\partial t}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_1}, & \cdots & \frac{\partial t}{\partial y_{m-1}}+\frac{\partial t}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_{m-1}}, & \frac{\partial t}{\partial y_m} \\ 0, & \cdots & 0, & \frac{\partial P}{\partial y_m} \end{vmatrix}}{\frac{\partial P}{\partial y_m}},$$

oder, wenn man in der Determinante rechts die mit $\frac{\partial y_m}{\partial y_p}$ multiplicirte letzte Verticalreihe von der p^{ten} Verticalreihe ($p = 1, 2, \ldots m-1$) abzieht und die Relationen

$$\frac{\partial P}{\partial y_p}+\frac{\partial P}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial y_p} = 0\quad (p = 1,\ 2,\ \ldots\ m-1)$$

*) Cfr. *Baltzer*, Determinanten, 4. Ausgabe, S. 130.

berücksichtigt:

$$D = \Sigma\pm\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial y_2}\frac{\partial w}{\partial y_3}\cdots\frac{\partial t}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial P}{\partial y_m}\right):\frac{\partial P}{\partial y_m}.$$

Indem man ganz analog mit der Determinante $\Sigma\pm(f'(x_1)v'(x_2)\dots t'(x_{m-1}))$ verfährt, ergiebt sich nach (5.) und (6.)

$$J = \iint\cdots\int(-1)^{m-1}\frac{U\Sigma\pm\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial t}{\partial x_{m-1}}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_m}\right)dx_1\,dx_2\dots dx_{m-1}}{\mathfrak{P}'(x_m)\Sigma\pm\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial t}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial P}{\partial y_m}\right)\sqrt{A}}.$$

Nach einem sogleich zu beweisenden Hilfssatze ist jedoch

$$\Sigma\pm\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial t}{\partial x_{m-1}}\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_m}\right) = 2\sqrt{(-1)^{m+1}A},$$

$$\Sigma\pm\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial v}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial t}{\partial y_{m-1}}\frac{\partial P}{\partial y_m}\right) = 2\sqrt{(-1)^{m+1}\mathfrak{A}},$$

und daher

$$J = \iint\cdots\int\frac{U dx_1\,dx_2\dots dx_{m-1}}{\mathfrak{P}'(x_m)\sqrt{\mathfrak{A}}}\;{}^{*)}\quad\text{q. e. d.}$$

Wofern speciell die Gleichungen in (1.) und (1^a.) derart beschaffen sind, dass sie durch Vertauschung der $x_\varkappa$ mit den $y_\varkappa$ in die Relationen (2.) übergehen, und wofern überdies die Functionalzeichen P und Π dieselbe Bedeutung besitzen, ist offenbar für $U = 1$ das Integral J ein solches, welches vermöge der Transformationen (2.) bis (3.) in seine ursprüngliche Gestalt zurückkehrt.

Das noch zu erhärtende Hilfstheorem lautet:

Für ein Werthsystem $x_1, x_2, \dots x_m$, welches die $m-1$ Gleichungen (1.) *und* (1^a.) *befriedigt, ist bei völliger Willkürlichkeit der u_i:*

$$(7.)\qquad \tfrac{1}{4}(\Sigma\pm(f'(x_1)v_2w_3\dots t_{n-1}u_n))^2 = (-1)^{m+1}(u_1x_1+\dots+u_mx_m)^2A.$$

Der Beweis ergiebt sich ohne Weiteres, wenn man in der mit

$$\tfrac{1}{4}(\Sigma\pm(f'(x_1)v_2\dots t_{n-1}u_n))^2$$

identischen Determinante **)

---

*) Das Vorzeichen von $\sqrt{A}$ kann beliebig angenommen, dasjenige von $\sqrt{\mathfrak{A}}$ dagegen muss nach dem obigen Beweise der Gleichung gemäss bestimmt werden:

$$(-1)^{m-1}\Sigma\pm\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial y_{m-1}}{\partial x_{m-1}}\right) = P'(y_m)\sqrt{A}:\mathfrak{P}'(x_m)\sqrt{\mathfrak{A}}.$$

**) Cfr. *Baltzer*, l. c. S. 31.

$$(-1)^m \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & \frac{1}{2}f'(x_1) & v_1 & \dots & t_1 & u_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & \frac{1}{2}f'(x_2) & v_2 & \dots & t_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & \frac{1}{2}f'(x_m) & v_m & \dots & t_m & u_n \\ \frac{1}{2}f'(x_1) & \frac{1}{2}f'(x_2) & \dots & \frac{1}{2}f'(x_m) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

die resp. mit $x_1, \dots x_m$ multiplicirten m ersten Verticalreihen von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Verticalreihe abzieht, in ähnlicher Weise mit den entsprechenden Horizontalreihen verfährt und die Gleichungen (1.) und (1^a.) berücksichtigt.

Für die besondere Annahme $u_x = \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_x}$ ist $u_1 x_1 + u_2 x_2 + \dots + u_n x_n = 1$, da $\nu \mathfrak{P} + 1$ eine homogene Function ν^{ten} Grades der x_x bedeutet, und daher im Hinblick auf $\mathfrak{P} = 0$:

$$x_1 \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_2} + \dots + x_m \frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x_m} = 1.$$

Zum Schlusse mag bemerkt werden, dass aus dem soeben bewiesenen Hilfssatze unmittelbar die folgende Verallgemeinerung eines *Aronhold*schen Theorems (dieses Journal Bd. 61 S. 103) fliesst:

Erfüllen die x_i sämmtliche Gleichungen in (1.) ***und*** (1^a.), ***ausgenommen die erste Relation in*** (1^a.); ***bedeuten ferner*** $c_1^{(r)}, c_2^{(r)}, \dots c_m^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots m-2$) ***willkürliche Grössen, und setzt man***

$$F_r = \tfrac{1}{2}\left(c_1^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_1} + c_2^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + c_m^{(r)} \frac{\partial f}{\partial x_m}\right),$$

$$W_r = (c_1^{(r)} w_1 + c_2^{(r)} w_2 + \dots + c_m^{(r)} w_m) \text{ etc. etc.,}$$

so wird das Integral

$$J = \int \frac{\Sigma \pm (c_1^{(1)} c_2^{(2)} \dots c_{m-2}^{(m-2)} x_{m-1} dx_m)}{(v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_m x_m) \Sigma \pm (W_1 \dots T_{m-3} F_{m-2})}$$

identisch mit

$$\frac{1}{\sqrt{(-1)^{m+1} A}} \log\left(\frac{\xi_1 f'(x_1) + \xi_2 f'(x_2) + \dots + \xi_m f'(x_m)}{v_1 x_1 + v_2 x_2 + \dots + v_m x_m}\right)^{*)};$$

---

*) Das Vorzeichen von $\sqrt{(-1)^{m+1} A}$ muss mit demjenigen übereinstimmen, welches bei der Berechnung des Werthsystems $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ verwendet wird, d. h. welches nach (7.) die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2} \Sigma \pm (f'(\xi_1) v_2 w_3 \dots t_{m-1} u_m) = \sqrt{(-1)^{m+1} A}\, (u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2 + \dots + u_m \xi_m)$$

für alle Werthe der u_1 erfüllt.

darin ist $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_m$ ein Werthsystem, ***welches sämmtlichen Gleichungen in*** (1.) ***und*** (1^a.) ***Genüge leistet.***

Dividirt man nämlich den Ausdruck J vor dem Integralzeichen durch die Wurzel $\sqrt{(-1)^{m+1}A}$ und multiplicirt denselben unterhalb des Integralzeichens mit dem dieser Wurzel gleichen Quotienten:

$$\frac{\Sigma\pm(\frac{1}{2}f'(\xi_1), v_2, \dots t_{m-1}, \frac{1}{2}f'(x_m))}{\frac{1}{2}f'(x_1)\xi_1 + \frac{1}{2}f'(x_2)\xi_2 + \dots + \frac{1}{2}f'(x_m)\xi_m} \text{*)} \equiv \frac{\Sigma\pm(\frac{1}{2}f'(\xi_1), v_2, \dots t_{m-1}, \frac{1}{2}f'(x_m))}{f(\xi, x)},$$

so erhält man

$$J = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{m+1}A}} \int \frac{(\Sigma\pm c_1^{(1)} \dots c_{m-2}^{(m-2)} x_{m-1}\, dx_m)\, \Sigma\pm(\frac{1}{2}f'(\xi_1), v_2, \dots \frac{1}{2}f'(x_m))}{v \cdot f(\xi, x)\, \Sigma\pm(W_1 \dots T_{m-3} F_{m-2})}.$$

Das Product des Zählers im Integrale ist nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten und nach einem oben erwähnten Satze**) gleich

$$\Sigma\pm(W_1 \dots T_{m-3} F_{m-2}) \cdot (f(\xi, x)\, dv - v \cdot f(\xi, dx)),$$

und daher

$$J = \frac{1}{\sqrt{(-1)^{m+1}A}} \int \frac{f(\xi, x)\, dv - v f(\xi, dx)}{v f(\xi, x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(-1)^{m+1}A}} \int \frac{d\,\frac{f(\xi, x)}{v}}{\frac{f(\xi, x)}{v}}; \quad \text{q. e. d.}$$

*) Man hat dabei die beliebigen u_x in dem Hilfssatze gleich $\frac{1}{2}f'(x_x)$ gesetzt.

**) Cfr. *Baltzer* l. c. Seite 31.

Darmstadt, im September 1880.

Ueber die Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten.

(Von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.)

Fast in allen Disciplinen der Mathematik bietet sich die Aufgabe dar, eine quadratische Form: $\sum_{\varkappa}\sum_{\lambda} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ ($\varkappa, \lambda = 1, 2, 3, \ldots n$) in eine Summe von Quadraten linearer Functionen der Veränderlichen $x_\varkappa$ zu verwandeln. Bekanntlich hat zu diesem Behufe *Lagrange**) eine successive Reductionsweise entwickelt, welche für praktische Rechnungen an Einfachheit und Eleganz nichts zu wünschen übrig lässt; wie die Arbeiten von *Gauss* über die Methode der kleinsten Quadrate und deren Anwendungen zur Genüge zeigen. (Man vgl. namentlich die „Disquisitio de elementis ellipticis Palladis", Bd. VI der Gesammtausgabe, Seite 20 ff.)

Eine tiefere theoretische Erforschung der *Lagrange*schen Transformation hat *Jacobi* im 53. Bande dieses Journals S. 266 ff. gegeben und insbesondere die dabei auftretenden linearen Functionen der $x_\varkappa$ independent darstellen gelehrt, allerdings unter Voraussetzung einer derartigen Anordnung der Variabeln**), dass für mindestens eine Permutation $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ die Reihe der Determinanten:

$$\Delta = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}), \quad \frac{\partial \Delta}{\partial a_{\alpha\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 \Delta}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta}} \quad \ldots \quad a_{\nu\nu}$$

kein verschwindendes Glied besitze.

Weniger gekannt scheint eine Darstellung der fraglichen Reduction zu sein, welche *Plücker* im 24. Bande dieses Journals S. 297 ff. angedeutet hat. Dieselbe besitzt wesentliche Vorzüge vor der *Jacobi*schen Methode, ist im gleichen Umfange wie diese giltig und lehrt in directer Weise die

*) Nach *Baltzer* zum ersten Male 1759 in Misc. Taur. 1 pag. 18.

**) Man vergleiche hierüber *Kronecker* im Berliner Monatsbericht vom April 1874: „Ueber die congruenten Transformationen der bilinearen Formen" § 1.

ursprünglichen Veränderlichen $x_\varkappa$ durch die transformirten (die oben erwähnten linearen Functionen) ausdrücken. Im Folgenden soll in weiterer Verfolgung des *Plücker*schen Grundgedankens eine *sämmtliche Besonderheiten* berücksichtigende Untersuchung des fraglichen Gegenstandes gegeben und namentlich auch auf den Fall näher eingegangen werden, in welchem zwischen den Veränderlichen $x_\varkappa$ lineare Relationen bestehen.

I. *Die Verwandlung einer quadratischen Form mit unabhängigen Veränderlichen* in eine Summe von Quadraten kann unter allen Umständen vermittelst zweier Lehnsätze geleistet werden, von denen der eine mit Einführung der Bezeichnungen:

$$A = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{mm}), \quad A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \quad (i, k = 1, 2, \dots m)$$

folgendermassen ausgesprochen werden kann:

Lemma 1.*) *Die quadratische Form* $u = \sum_i \sum_k a_{ik} y_i y_k \, (i, k = 1, 2, \dots m)$ *der willkürlichen Veränderlichen* y_i *geht für* $A_{mm} \gtrless 0$ *durch die Substitutionen*

$$(1.) \qquad y_p = \eta_p + (A_{pm} : A_{mm}) y_m \quad (p = 1, 2, \dots m-1)$$

über in

$$(1^a.) \qquad u = \sum_p \sum_q a_{pq} \eta_p \eta_q + (A : A_{mm}) y_m^2 \qquad (p, q = 1, 2, \dots m-1).$$

Fügt man nämlich dem Systeme (1.) die evidente Gleichung

$$y_m = (A_{mm} : A_{mm}) \cdot y_m$$

hinzu, so ergiebt sich durch Multiplication des so erweiterten Systemes mit a_{qp}, resp. a_{qm}, und nachherige Summation über p:

$$(1^b.) \quad \begin{cases} a_{q1} y_1 + a_{q2} y_2 + \dots + a_{qm} y_m = a_{q1} \eta_1 + a_{q2} \eta_2 + \dots + a_{q,m-1} \eta_{m-1} \quad (q = 1, 2, \dots m-1) \\ a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \dots + a_{mm} y_m = a_{m1} \eta_1 + a_{m2} \eta_2 + \dots + a_{m,m-1} \eta_{m-1} + (A : A_{mm}) y_m. \end{cases}$$

Indem man diese m Relationen beziehungsweise mit $y_1, y_2, \dots y_m$ multiplicirt und hernach addirt, erhält man

$$u = \eta_1 \sum_i a_{i1} y_1 + \eta_2 \sum_i a_{i2} y_2 + \dots + \eta_{m-1} \sum_i a_{i,m-1} y_{m-1} + (A : A_{mm}) y_m^2,$$

eine Gleichung, welche in die zu erweisende (1^a.) übergeht, sobald man die Summen rechter Hand durch ihre Werthe aus (1^b.) ersetzt.

Der andere Lehnsatz lautet:

---

*) Dieses Lemma ist mutatis mutandis im Falle von fünf Veränderlichen bereits von *Plücker* l. c. ausgesprochen worden.

Lemma 2. *Ist A nicht gleich Null, verschwindet dagegen irgend eine Hauptunterdeterminante $(m-1)^{ten}$ Grades, etwa A_{mm}, so wird, $A_{m,m-1} \gtrless 0$ angenommen*), durch die Transformationen**)*

$$(2.)\qquad y_r = Y_r + (A_{mr} : A_{m,m-1})\, y_{m-1} \qquad (r = 1,\ 2,\ \dots\ m-2),$$

$$(2^a.)\quad \begin{cases} (A:A_{m,m-1})\, y_{m-1} = \tfrac{1}{2}((A:A_{m,m-1}) + a_{mm})\, Y_m + \tfrac{1}{2}((A:A_{m,m-1}) - a_{mm})\, Y_{m-1} \\ \qquad\qquad - a_{m1} Y_1 - a_{m2} Y_2 \dots - a_{m,m-2} Y_{m-2}, \\ y_m = Y_{m-1} - Y_m \end{cases}$$

die quadratische Form u übergeführt in

$$(2^b.)\qquad u = a_{11} Y_1^2 + 2 a_{12} Y_1 Y_2 + \dots + a_{m-2,m-2} Y_{m-2}^2 + \frac{A}{A_{m,m-1}} (Y_{m-1}^2 - Y_m^2).$$

Beweis. Erweitert man das System (2.) um die selbstverständliche Relation $y_{m-1} = (A_{m,m-1} : A_{m,m-1})\, y_{m-1}$, und multiplicirt alsdann die einzelnen Gleichungen derselben mit a_{qr} und $a_{q,m-1}$, so folgt durch Summation (wegen $A_{mm} = 0$):

$$(2^c.)\quad \begin{cases} a_{q1} y_1 + a_{q2} y_2 + \dots + a_{q,m-1} y_{m-1} = a_{q1} Y_1 + a_{q2} Y_2 + \dots + a_{q,m-2} Y_{m-2}; \\ (q = 1,\ 2,\ \dots\ m-1). \end{cases}$$

Indem man diese Relationen mit y_q multiplicirt und über q summirt, ergiebt sich

$$a_{11} y_1^2 + 2 a_{12} y_1 y_2 + \dots + a_{m-1,m-1} y_{m-1}^2$$
$$= Y_1 . \sum_q a_{q1} y_q + Y_2 . \sum_q a_{q2} y_q + \dots + Y_{m-2} . \sum_q a_{q,m-2} y_q \quad (q = 1,\ 2,\ \dots\ m-1),$$

d. h. unter erneuter Anwendung des Systems $(2^c.)$

$$\sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q = \sum_r \sum_s a_{rs} Y_r Y_s \quad (p,\ q = 1,\ 2,\ \dots\ m-1;\quad r,\ s = 1,\ 2,\ \dots\ m-2).$$

Da gleichzeitig nach (2.)

$$(2^d.)\quad \begin{cases} a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \dots + a_{m,m-1} y_{m-1} \\ = a_{m1} Y_1 + a_{m2} Y_2 + \dots + a_{m,m-2} Y_{m-2} + \dfrac{A}{A_{m,m-1}} y_{m-1}, \end{cases}$$

so wird die quadratische Form:

$$u = \sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q + y_m (2 a_{m1} y_1 + \dots + 2 a_{m,m-1} y_{m-1} + a_{mm} y_m)$$

---

*) Im Hinblick auf die Gleichung $A = a_{m1} A_{m1} + a_{m2} A_{m2} + \dots + a_{m,m-1} A_{m,m-1} + a_{mm} A_{mm}$ ist für $A_{mm} = 0$ mindestens eine der Grössen $A_{m1}, A_{m2}, \dots A_{m,m-1}$ von Null verschieden.

**) Die Substitution (2.) ist im Grunde identisch mit derjenigen, welche aus dem Lemma 1 vermöge Ersetzung von m durch $m-1$ hervorgeht.

vermöge des Systems (2.) übergehen in:

$$u = \sum_r \sum_s a_{rs} Y_r Y_s + y_m (2 a_{m1} Y_1 + 2 a_{m2} Y_2 + \cdots + 2 a_{m,m-2} Y_{m-2} + \frac{2A}{A_{m,m-1}} y_{m-1} + a_{mm} y_m),$$

oder bei Einführung der Zeichen Y_{m-1} und Y_m nach (2^b.) in:

$$u = \sum_r \sum_s a_{rs} Y_r Y_s + \frac{A}{A_{m,m-1}} (Y_{m-1} - Y_m)(Y_{m-1} + Y_m); \text{ q. e. d.}$$

Mit Rücksicht auf das Folgende bemerken wir noch, dass eine Form u, welche den Bedingungen des Lemma 2. Genüge leistet und reelle Coefficienten a_{ik} besitzt, nie definit sein kann, d. h. dass u durch passende Bestimmung der Veränderlichen y_i Zahlenwerthe mit entgegengesetztem Vorzeichen anzunehmen vermag. Bestimmt man nämlich gemäss den Relationen (2.) und (2^a.) die y_i derart, dass $Y_1 = 0, \ldots Y_{m-2} = 0$, dagegen Y_{m-1} und Y_m das eine Mal resp. 0 und 1, das andere Mal 1 und 0 werden, so erhält u das eine Mal den Werth $A : A_{m,m-1}$, das andere Mal den Werth $-(A : A_{m,m-1})$.

Durch Combinirung der beiden Lehnsätze 1. und 2. lässt sich nunmehr eine beliebige quadratische Form

$$f = \sum_\varkappa \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \quad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots \nu)$$

mit nicht verschwindender Determinante: $\Delta_n = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{nn})$ in eine Summe von Quadraten, wie folgt, verwandeln. Ist irgend eine Hauptunterdeterminante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, etwa $\Delta_{n-1} = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{n-1,n-1})$, von Null verschieden, so giebt es nach dem Lemma 1. eine Substitution

$$x_1 = x_1' + \alpha_1^{(n)} x_n; \quad \ldots \quad x_{n-1} = x_{n-1}' + \alpha_{n-1}^{(n)} x_n,$$

welche f überführt in

$$f = a_{11} x_1'^2 + 2 a_{12} x_1' x_2' + \cdots + a_{n-1,n-1} x_{n-1}'^2 + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2.$$

Wird dagegen $\Delta_{n-1} = 0$, während etwa $\frac{\partial \Delta_n}{\partial a_{n,n-1}}$ von Null verschieden, so kann man nach dem Lemma 2. lineare Functionen $x_1', x_2', \ldots x_n'$ der $x_\varkappa$ finden, derart dass:

$$f = a_{11} x_1'^2 + 2 a_{12} x_1' x_2' + \cdots + a_{n-2,n-2} x_{n-2}'^2 + (A : A_{n,n-1})(x_{n-1}'^2 - x_n'^2).$$

In beiden Fällen besitzen die von f abgetrennten quadratischen Formen

$$\sum_\mu \sum_\nu a_{\mu\nu} x_\mu' x_\nu' \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n-1 \quad \text{oder} \quad = 1, 2, \ldots n-2)$$

nicht verschwindende Discriminanten

$$\Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{n-1,n-1}) \quad \text{und} \quad \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{n-2,n-2})\,^{*}),$$

und können in gleicher Weise weiter reducirt werden wie f selbst.

Man erhält so schliesslich das Theorem, das von mir bereits an anderer Stelle (*Hesse*, Raumgeometrie, dritte Ausgabe, Seite 460) bewiesen worden ist:

Wählt man die Permutation** $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ der Zahlen $1, 2, 3, \ldots r$ **derart, dass keine zwei unmittelbar auf einander folgenden Glieder der Reihe

$$(3.)\qquad \Delta_n,\ \frac{\partial \Delta_n}{\partial a_{\alpha\alpha}},\ \frac{\partial^2 \Delta_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta}},\ \frac{\partial^3 \Delta_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta} \partial a_{\gamma\gamma}},\ \ldots\ a_{\nu\nu},\ 1$$

verschwinden, so enthält die Form** f **bei der Transformation in eine Summe von Quadraten genau so viel negative Quadrate, als die Reihe** (3.) **Zeichenwechsel darbietet, wenn man bei Zählung der letzteren etwa auftretende Nullen weglässt.

Nimmt man speciell mit *Jacobi* an, dass keine der Determinanten

$$(3^a.)\qquad \Delta_n,\ \Delta_{n-1},\ \ldots\ \Delta_m = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}),\ \ldots\ a_{11},\ 1$$

verschwinde, so kann man durch eine fortlaufende Reihe von Transformationen nach dem Lemma 1. die quadratische Form überführen in:

$$(4.)\qquad f = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} x_n^2 + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} x'^2_{n-1} + \frac{\Delta_{n-2}}{\Delta_{n-3}} x''^2_{n-2} + \cdots + a_{11} x_1^{(n-1)} x_1^{(n-1)}.$$

Dabei wird allgemein für irgend eine ganze Zahl m zwischen 1 und n (incl. der Grenzen) die Form

$$a_{11} x_1^{(n-m)} x_1^{(n-m)} + 2a_{12} x_1^{(n-m)} x_2^{(n-m)} + \cdots + a_{mm} x_m^{(n-m)} x_m^{(n-m)}$$

verwandelt in

$$a_{11} x_1^{(n-m+1)} x_1^{(n-m+1)} + \cdots + a_{m-1,m-1} x_{m-1}^{(n-m+1)} x_{m-1}^{(n-m+1)} + \frac{\Delta_m}{\Delta_{m-1}} x_m^{(n-m)} x_m^{(n-m)}$$

durch eine Substitution der Gestalt:

$$(5.)\qquad x_l^{(n-m)} = x_l^{(n-m+1)} + \alpha_l^{(m)} x_n^{(n-m)} \qquad (l = 1, 2, \ldots m-1),$$

wofern die Grössen $A_{ml} : A_{mm}$ in (1.) der Kürze halber mit $\alpha_l^{(m)}$ bezeichnet werden. Setzt man in der letzten Gleichung (5.) für m der Reihe nach

---

*) Für $\Delta_{n-2} = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{n-2,n-2}$ folgt dies sofort aus der bekannten Identität:

$$\Delta_n \Delta_{n-2} = \Delta_{n-1} \frac{\partial \Delta_n}{\partial a_{n-1,n-1}} - \left(\frac{\partial \Delta_n}{\partial a_{n,n-1}}\right)^2;$$

wegen $\Delta_{n-1} = 0$ *hat daher* Δ_{n-2} *stets das entgegengesetzte Vorzeichen wie* Δ_n.

$n, n-1, \ldots m$ und summirt alle so entstehenden Relationen, so ergiebt sich

$$(6.)\qquad x_l = x_l^{(n-m+1)} + \alpha_l^{(n)} x_n + \alpha_l^{(n-1)} x_{n-1}^{(1)} + \cdots + \alpha_l^{(m)} x_n^{(n-m)} \qquad (l = 1, 2, \ldots m-1);$$

somit, indem man speciell $l = m-1$ annimmt und nachträglich k an Stelle von $m-1$ substituirt:

$$(6^a.)\qquad x_k = x_k^{(n-k)} + \alpha_k^{(n)} x_n + \alpha_k^{(n-1)} x_{n-1}^{(1)} + \cdots + \alpha_k^{(k+1)} x_{k+1}^{(n-k-1)} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1).$$

Will man umgekehrt die Grössen $x_q^{(n-k)}$ durch die x_k ausdrücken, so erwäge man, dass nach (1^b.)

$$a_{q1} x_1^{(n-m)} + a_{q2} x_2^{(n-m)} + \cdots + a_{qm} x_m^{(n-m)} = a_{q1} x_1^{(n-m+1)} + a_{q2} x_2^{(n-m+1)} + \cdots + a_{q,m-1} x_{m-1}^{(n-m+1)},$$

und dass daher durch die successiven Annahmen $m = n, n-1, \ldots k+1$ das System sich ergiebt:

$$(6^b.)\qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_q} = a_{q1} x_1^{(n-k)} + a_{q2} x_2^{(n-k)} + \cdots + a_{qk} x_k^{(n-k)} \qquad (q = 1, 2, \ldots k).$$

Diese linearen Gleichungen für die Unbekannten $x_1^{(n-k)}, x_2^{(n-k)}, \ldots x_k^{(n-k)}$ besitzen ex hypothesi eine von Null verschiedene Determinante (Δ_k) und können in bekannter Weise aufgelöst werden. Sind in der Darstellung (4.) die Coefficienten sämmtlicher Quadrate mit dem gleichen Vorzeichen versehen, so ist die Form f definit und kann für reelle $a_{\varkappa\lambda}$ und $x_\varkappa (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n)$ keine Zahlenwerthe mit entgegengesetztem Vorzeichen annehmen. Dieser Satz gilt auch umgekehrt:

Für eine wesentlich positive oder negative Form müssen die Glieder der Reihe (3^a.) sämmtlich positiv sein oder lauter Zeichenwechsel darbieten.

Beweisen wir zunächst, ***dass keine Determinante in*** (3^a.) ***verschwinden kann.*** Wäre nämlich etwa $\Delta_{m-1} (m = n, n-1, \ldots 2)$ die erste verschwindende Determinante in der Reihe (3^a.), so geht f durch die Annahme

$$x_n = x_{n-1} = \cdots = x_{m+1} = 0$$

über in

$$a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{mm} x_m^2,$$

d. h. in eine quadratische Form, welche den Bedingungen des Lemma 2. Genüge leistet und somit durch passende Bestimmung der willkürlichen Veränderlichen $x_1, \ldots x_m$ ihr Zeichen zu wechseln vermag*).

---

*) Unabhängig von den Ausführungen zu Lemma 2. und besonders für den ersten Vortrag in der Theorie der Maxima und Minima geeignet ist der folgende Beweis. Man setze in $u \equiv \sum_k \sum_l a_{kl} x_k x_l$ $(k, l = 1, 2 \ldots m)$ die Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots x_{m-1}$ resp.

Eine definite Form f kann daher stets in die Form (4.) gebracht werden, und die ihr zugehörigen Determinantenquotienten $(\Delta_i : \Delta_{i-1})$ müssen sämmtlich das gleiche Vorzeichen haben, da f bei gegentheiliger Annahme bald positiv bald negativ werden könnte.

Uebrigens hätte sich in ganz derselben Weise zeigen lassen:

Die quadratische Form f ist stets dann und nur dann wesentlich negativ (bez. positiv), wenn die Reihe (3.) *für irgend eine bestimmte Permutation $\alpha, \beta, \gamma, \dots \nu$ der Zahlen* 1, 2, ... n *lauter Zeichenwechsel (beziehungsweise Zeichenfolgen) darbietet. Werden also diese Bedingungen von den Gliedern in* (3.) *bei einer beliebigen Permutation der Zahlen* 1, 2, ... n *erfüllt, so haben dieselben auch für jede andere Permutation statt.*

Der Fall, in welchem die Determinante Δ_n gleich Null ist, kann nunmehr leicht erledigt werden. Um die Vorstellung zu fixiren, mögen sämmtliche Subdeterminanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ_n verschwindend angenommen werden, dagegen sei mindestens eine Subdeterminante m^{ten} Grades von Null verschieden, etwa:

$$c = \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \dots & a_{m\varepsilon} \end{vmatrix} = \Sigma \pm (a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{m\varepsilon}),$$

worin $\alpha, \beta, \dots \varepsilon$ irgend welche bestimmte m Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... n bedeuten*). Alsdann besteht,

$$f_k = a_{k1} x_1 + a_{k2} x_2 + \dots + a_{kn} x_n \qquad (k = 1,\ 2,\ \dots\ n)$$

---

gleich $A_{m1}, A_{m2}, \dots A_{m,m-1}$. Alsdann wird wegen $A_{mm} = 0$ für beliebige Werthe von x_m:

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_l} \equiv a_{l1} x_1 + a_{l2} x_2 + \dots + a_{lm} x_m = a_{lm} x_m, \quad (l = 1, 2 \dots m-1)$$

$$\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_m} \equiv a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mm} x_m = A + a_{mm} x_m,$$

und

$$u \equiv \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_1} x_1 + \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_2} x_2 + \dots + \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x_m} x_m = x_m (2A + a_{mm} x_m).$$

Da ex hyp. die Determinante A nicht verschwindet, so kann offenbar durch geeignete Verfügung über x_m das Product $x_m\{2A + a_{mm} x_m\}$ sein Zeichen wechseln.

*) Das Raisonnement im folgenden Texte lässt sich ohne Mühe auch auf den Fall anwenden, wenn an die Stelle von 1, 2, ... m irgend welche m andere Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... n treten würden.

gesetzt, für alle Werthe der x_k:

$$(7.)\qquad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} & f_1 \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \dots & a_{m\varepsilon} & f_m \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\varepsilon} & f_i \end{vmatrix} = 0,$$
$$(i = m+1,\ m+2, \dots n),$$

eine Gleichung, welche vermöge Entwickelung der Determinante nach den Elementen der letzten Verticalreihe die Gestalt annehmen möge:

$$(7^a.)\qquad cf_i + c_i^{(1)} f_1 + c_i^{(2)} f_2 + \dots + c_i^{(m)} f_m = 0 \quad (i = m+1,\ m+2, \dots n).$$

Darin ist das System der Grössen c, $c_i^{(1)}$, $c_i^{(2)}$, ... $c_i^{(m)}$ von den x_i unabhängig, und die Determinante c ex hyp. von Null verschieden. Setzt man daher

$$(8.)\qquad x_l = X_l + (c_{m+1}^{(l)} x_{m+1} + c_{m+2}^{(l)} x_{m+2} + \dots + c_n^{(l)} x_n) : c \quad (l = 1,\ 2, \dots m)$$

und fügt die evidenten Relationen hinzu:

$$x_i = c x_i : c \quad (i = m+1,\ m+2, \dots n),$$

so folgt durch Multiplication dieser Gleichungen mit a_{kl}, resp. a_{ki} und Summation über l resp. i, unter Rücksichtnahme auf (7^a.):

$$f_k = a_{k1} X_1 + a_{k2} X_2 + \dots + a_{km} X_m \quad (k = 1,\ 2, \dots m),$$

und

$$\begin{aligned} f &= f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_n x_n = X_1 \Sigma a_{k1} x_1 + \dots + X_m \Sigma a_{km} x_m \\ &= X_1 f_1 + X_2 f_2 + \dots + X_m f_m \\ &= a_{11} X_1^2 + 2a_{12} X_1 X_2 + \dots + a_{mm} X_m^2. \end{aligned}$$

Da die x_i völlig willkürlich sind und somit nach (8.) auch den X_l beliebige Werthe zuertheilt werden können, so braucht man an Stelle der Form f lediglich die quadratische Function der m unabhängigen Veränderlichen X_l zu betrachten. Diese letztere besitzt eine nicht verschwindende Discriminante $\Sigma \pm (a_{11} a_{22} \dots a_{mm})$. Setzt man nämlich in dem Systeme von m Gleichungen

$$(9.)\qquad \left\{ \begin{aligned} & f'(x_h) = f'(X_1)\frac{\partial X_1}{\partial x_h} + f'(X_2)\frac{\partial X_2}{\partial x_h} + \dots + f'(X_m)\frac{\partial X_m}{\partial x_h} \\ & = (\sum_l a_{1l} X_l)\frac{\partial X_1}{\partial x_h} + \dots + (\sum_l a_{ml} X_l)\frac{\partial X_m}{\partial x_h}, \quad (h = \alpha,\ \beta, \dots \varepsilon) \end{aligned} \right.$$

die Veränderlichen x_{m+1}, x_{m+2}, ... x_n gleich Null, d. h. nach (8.) $X_l = x_l$, so ergiebt sich durch Vergleichung der Coefficienten von x_l in (9.)

$$a_{hl} = a_{1l}\frac{\partial X_1}{\partial x_h} + a_{2l}\frac{\partial X_2}{\partial x_h} + \cdots + a_{ml}\frac{\partial X_m}{\partial x_h} \quad (h = \alpha,\ \beta,\ \ldots\ \varepsilon;\ l = 1,\ 2,\ \ldots\ m),$$

also nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten

$$c = \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}) \Sigma \pm \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_\alpha}\frac{\partial X_2}{\partial x_\beta} \cdots \frac{\partial X_m}{\partial x_\varepsilon}\right).$$

Da c nicht verschwindet, so ist jeder der beiden Factoren auf der rechten Seite der letzten Gleichung ebenfalls von Null verschieden.*) Ein anderer Beweis für das Nichtverschwinden von $\Sigma \pm (a_{11} a_{22} a_{33} \ldots a_{mm})$, der nur Sätze aus der Determinantentheorie benutzt, ist folgender. Nach Voraussetzung besteht das System von Relationen:

$$\begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \ldots & a_{1\varepsilon} & a_{1l} \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \ldots & a_{2\varepsilon} & a_{2l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \ldots & a_{m\varepsilon} & a_{ml} \\ a_{h\alpha} & a_{h\beta} & \ldots & a_{h\varepsilon} & a_{hl} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} (h = \alpha, \beta, \ldots \varepsilon) \\ (l = 1, 2, \ldots m), \end{matrix}$$

oder vermöge Entwickelung nach den Elementen der letzten Verticalreihe:

$$a_{1l} c_h^{(1)} + a_{2l} c_h^{(2)} + \cdots + a_{ml} c_h^{(m)} = -a_{hl} . c.$$

Gemäss dem Multiplicationstheorem der Determinanten ist daher

$$\begin{aligned} \Sigma \pm (a_{11} a_{22} \ldots a_{mm}) . \Sigma \pm (c_\alpha^{(1)} c_\beta^{(2)} \ldots c_\varepsilon^{(m)}) &= (-1)^m c^m \Sigma \pm (a_{\alpha 1} a_{\beta 2} \ldots a_{\varepsilon m}) \\ &= (-1)^m c^{m+1}. \end{aligned}$$

II. *Sind die Veränderlichen der Form f nicht willkürlich*, sondern durch ν lineare Relationen:

$$(10.) \quad \begin{cases} v \equiv v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_n x_n = 0, \\ w \equiv w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_n x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t \equiv t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n = 0 \end{cases}$$

mit einander verknüpft, so lässt sich auch jetzt noch für f eine der *Lagrange*schen analoge Transformation in $n-\nu$ Quadrate angeben, und zwar vermittelst zweier anderen Lehnsätze, zu deren conciser Fassung wir folgende Bezeichnungen einführen:

*) Wenn also sämmtliche Subdeterminanten $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades von Δ_n verschwinden, nicht aber alle Subdeterminanten m^{ten} Grades, so hat immer mindestens eine Hauptunterdeterminante m^{ten} Grades einen von Null verschiedenen Werth. Cfr. *Hesse*, Raumgeometrie, 3. Ausgabe, S.S. 453—454.

$$(11.)\quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & v_1 & w_1 & \dots & t_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & v_2 & w_2 & \dots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} & v_m & w_m & \dots & t_m \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ w_1 & w_2 & \dots & w_m & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$(11^a.)\quad A_{ik} = \frac{\partial A}{\partial a_{ik}},\quad V_i = \frac{\partial A}{\partial v_i},\quad W_i = \frac{\partial A}{\partial w_i},\quad \dots$$

Lemma 3. *Das simultane System der quadratischen Form*

$$(12.)\quad u = \sum_i \sum_k a_{ik} y_i y_k \quad (i,\ k = 1,\ 2, \dots m)$$

und der linearen Formen

$$(12^a.)\quad \begin{cases} v \equiv v_1 y_1 + v_2 y_2 + \dots + v_m y_m, \\ w \equiv w_1 y_1 + w_2 y_2 + \dots + w_m y_m, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ t \equiv t_1 y_1 + t_2 y_2 + \dots + t_m y_m \end{cases}$$

wird durch die Substitutionen

$$(12^b.)\quad y_p = \eta_p + (A_{m1} : A_{mm}) y_m,\quad (A_{mm} \lesseqgtr 0),\quad (p = 1,\ 2, \dots m-1)$$

übergeführt in

$$(12^c.)\quad \begin{cases} u = a_{11}\eta_1^2 + 2a_{12}\eta_1\eta_2 + \dots + a_{m-1,m-1}\eta_{m-1}^2 + (A : A_{mm}) y_m^2 \\ \qquad - 2y_m (V_m v + W_m w + \dots + T_m t) : A_{mm}, \end{cases}$$

$$(12^d.)\quad \begin{cases} v = v_1 \eta_1 + v_2 \eta_2 + \dots + v_{m-1}\eta_{m-1}, \\ w = w_1 \eta_1 + w_2 \eta_2 + \dots + w_{m-1}\eta_{m-1}, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ t = t_1 \eta_1 + t_2 \eta_2 + \dots + t_{m-1}\eta_{m-1}. \end{cases}$$

Beweis. Wie beim Lemma 1. wird zunächst nach $(12^b.)$ und auf Grund elementarer Determinantensätze:

$$(12^e.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_p} = a_{p1}\eta_1 + a_{p2}\eta_2 + \dots + a_{p,m-1}\eta_{m-1} - y_m (V_m v_p + W_m w_p + \dots) : A_{mm} \\ \qquad\qquad (p = 1,\ 2, \dots m-1) \\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_m} = a_{m1}\eta_1 + a_{m2}\eta_2 + \dots + a_{m,m-1}\eta_{m-1} + y_m (A : A_{mm}) \\ \qquad - y_m (V_m v_m + W_m w_m + \dots + T_m t_m) : A_{mm}, \end{cases}$$

somit

$$u = \tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_1}y_1+\cdots+\frac{\partial u}{\partial y_{m-1}}y_{m-1}+\frac{\partial u}{\partial y_m}y_m$$

$$= \eta_1\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_1}+\eta_2\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_2}+\cdots+\eta_{m-1}\tfrac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y_{m-1}}+y_m^2(A:A_{mm})$$

$$-y_m(V_m v+W_m w+\cdots+T_m t):A_{mm},$$

welche Gleichung das fragliche Lemma erweist, wenn man das unmittelbar ersichtliche System (12^d.) benutzt und die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial y_p}$ ($p=1,\ 2,\ \dots\ m-1$) durch ihre Werthe aus (12^c.) ersetzt.

Lemma 4. *Ist für $A \lesseqgtr 0$ die Subdeterminante A_{mm} gleich Null, dagegen $A_{m,m-1}$ von Null verschieden*); setzt man ferner der Kürze wegen*

$$(13.)\quad \begin{cases} \Delta_{qm} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial a_{m-1,m-1}\partial a_{qm}}, & (q=1,\ 2,\ \dots\ m-2,\ m) \\ V_m^{(m-1)} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial a_{m-1,m-1}\partial v_m}, & W_m^{(m-1)} = \dfrac{\partial^2 A}{\partial a_{m-1,m-1}\partial w_m},\quad \dots \end{cases}$$

so bestehen vermöge der Substitutionen:

$$(13^a.)\qquad y_\nu = \eta_\nu+\frac{A_{\nu m}}{A_{m-1,m}}y_{m-1}+\frac{\Delta_{\nu m}}{\Delta_{mm}}y_m \qquad (\nu=1,\ 2,\ \dots\ m-2)$$

die Identitäten:

$$(13^b.)\quad \begin{cases} u = \sum\limits_r\sum\limits_s a_{rs}\eta_r\eta_s+\{y_{m-1}^2-(y_{m-1}-y_m)^2\}\,A:A_{m,m-1} \\ \quad -2(v V_m+w W_m+\cdots+t T_m)y_{m-1}:A_{m,m-1} \\ \quad -2(v V_m^{(m-1)}+w W_m^{(m-1)}+\cdots+t T_m^{(m-1)})y_m:\Delta_{m,m} \\ \qquad (r,\ s=1,\ 2,\ \dots\ m-2); \end{cases}$$

$$(13^c.)\quad \begin{cases} v = v_1\eta_1+v_2\eta_2+\cdots+v_{m-2}\eta_{m-2}, \\ w = w_1\eta_1+w_2\eta_2+\cdots+w_{m-2}\eta_{m-2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t = t_1\eta_1+t_2\eta_2+\cdots+t_{m-2}\eta_{m-2}. \end{cases}$$

Beweis. Definirt man Y_r durch:

$$(14.)\qquad y_r = Y_r+(A_{mr}:A_{m,m-1})y_{m-1} \qquad (r=1,\ 2,\ \dots\ m-2),$$

so wird nach Hinzufügung der Identität

$$y_{m-1} = (A_{m,m-1}:A_{m,m-1})y_{m-1}$$

---

*) A ist offenbar eine homogene Function $(n-\nu)^{\text{ten}}$ Grades der Coefficienten $a_{\varkappa\lambda}$ und befriedigt daher die Gleichung $(n-\nu)A = \Sigma_\varkappa\Sigma_\lambda A_{\varkappa\lambda}a_{\varkappa\lambda}$ ($\varkappa,\lambda = 1, 2, \dots n$). Dieselbe zeigt, dass stets mindestens eine Subdeterminante (etwa $A_{m,m-1}$) von Null verschieden ist.

und mit Rücksicht auf $A_{mm} = 0$:

$$(14^a.)\quad \begin{cases} v_1 y_1 + v_2 y_2 + \cdots + v_{m-1} y_{m-1} = v_1 Y_1 + v_2 Y_2 + \cdots + v_{m-2} Y_{m-2} \\ w_1 y_1 + w_2 y_2 + \cdots + w_{m-1} y_{m-1} = w_1 Y_1 + w_2 Y_2 + \cdots + w_{m-2} Y_{m-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Ferner ist:

$$(14^b.)\quad \begin{cases} a_{p1} y_1 + a_{p2} y_2 + \cdots + a_{p,m-1} y_{m-1} = a_{p1} Y_1 + a_{p2} Y_2 + \cdots + a_{p,m-2} Y_{m-2} \\ \quad -(v_p V_m + w_p W_m + \cdots) \dfrac{y_{m-1}}{A_{m,m-1}} \quad (p = 1, 2, \ldots m-1), \end{cases}$$

somit:

$$\sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q = Y_1 \sum_p a_{1p} y_p + \cdots + Y_{m-2} \sum a_{m-2,p} y_p$$

$$-\{\sum_p v_p y_p . V_m + \sum_p w_p y_p . W_m + \cdots\} \frac{y_{m-1}}{A_{m,m-1}} \quad (p, q = 1, 2, \ldots m-1),$$

oder mit Benutzung von ($14^b.$):

$$\sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q = \sum_r \sum_s a_{rs} Y_r Y_s - 2\{V_m . \sum_p v_p y_p + W_m . \sum_p w_p y_p + \cdots\} : A_{m,m-1}$$
$$(r, s = 1, 2, \ldots m-2).$$

Da überdies

$$(14^c.)\quad \begin{cases} a_{m1} y_1 + a_{m2} y_2 + \cdots + a_{m,m-1} y_{m-1} = a_{m1} Y_1 + a_{m2} Y_2 + \cdots + a_{m,m-2} Y_{m-2} \\ \quad + \dfrac{A}{A_{m,m-1}} y_{m-1} - (v_m V_m + w_m W_m + \cdots) \dfrac{y_{m-1}}{A_{m,m-1}}, \end{cases}$$

so geht die quadratische Form u, d. h.

$$\sum_p \sum_q a_{pq} y_p y_q + 2 y_m \sum_p a_{mp} y_p + a_{mm} y_m^2$$

vermöge ($13^a.$) nach Ersetzung von y_m durch den Buchstaben Y_m über in:

$$(14^d.)\quad \begin{cases} u = \sum_\varrho \sum_\sigma a_{\varrho\sigma} Y_\varrho Y_\sigma + 2(A : A_{m,m-1}) y_{m-1} Y_m - 2(V_m v + W_m w + \cdots) y_{m-1} : A_{m,m-1}, \\ \quad (\varrho, \sigma = 1, 2, 3, \ldots m-2, m). \end{cases}$$

Aber nach Lemma 3. erhält man durch die Substitutionen:

$$(15.)\quad Y_r = \eta_r + (\varDelta_{rm} : \varDelta_{mm}) Y_m \quad (r = 1, 2, \ldots m-2),$$

$$(15^a.)\quad \begin{cases} \sum_\varrho \sum_\sigma a_{\varrho\sigma} Y_\varrho Y_\sigma = \sum_r \sum_s a_{rs} \eta_r \eta_s + (A_{m-1,m-1} : \varDelta_{mm}) Y_m^2 - 2 V_m^{(m-1)} Y_m : \varDelta_{mm} - \cdots \\ \sum v_\varrho Y_\varrho = \sum v_r \eta_r, \quad \sum w_\varrho Y_\varrho = \sum w_r \eta_r, \quad \ldots \\ (\varrho = 1, 2, \ldots m-2, m; \ r, s = 1, 2, \ldots m-2), \end{cases}$$

Relationen, welche im Vereine mit (14.)—($14^d.$) das Lemma 4. erhärten, wenn man nachträglich wieder y_m an Stelle von Y_m setzt und noch berück-

sichtigt, dass wegen $A_{mm} = 0$

$$A : A_{m,m-1} = -(A_{m-1,m-1} : \Delta_{mm})^{*)}.$$

Auf Grund der beiden Lehnsätze 3. und 4. ist es nunmehr leicht, eine quadratische Form $\Sigma\Sigma a_{ks} x_k x_s$, deren Veränderliche den ν Gleichungen (10.) Genüge leisten, durch eine Reihe successiver Transformationen in eine Summe von $n-\nu$ unabhängigen Quadraten zu verwandeln, wenigstens so lange die Determinante A_n**), die aus (11.) für $m = n$ hervorgeht, nicht verschwindet.

Wenn nämlich eine beliebige Hauptunterdeterminante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, etwa A_{n-1}, von Null verschieden ist, so kann man nach Lehnsatz 3. eine lineare Substitution angeben, welche bei völliger Willkürlichkeit von x_n die Form f in die Gestalt überführt:

$$f = a_{11} x'_1 x'_1 + 2 a_{12} x'_1 x'_2 + \cdots + a_{n-1,n-1} x'_{n-1} x'_{n-1} + (A_n : A_{n-1}) x_n^2,$$

und bei welcher die $x'_1 \dots x'_{n-1}$ durch die Relationen verknüpft sind:

$$\begin{aligned} v_1 x'_1 + v_2 x'_2 + \cdots + v_{n-1} x'_{n-1} &= 0, \\ w_1 x'_1 + w_2 x'_2 + \cdots + w_{n-1} x'_{n-1} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ t_1 x'_1 + t_2 x'_2 + \cdots + t_{n-1} x'_{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Ist dagegen $A_{nn} = 0$ und $A_{n,n-1} \lesseqgtr 0$, so lässt sich auf Grund des Lemma 4. f verwandeln in:

$$f = a_{11} x_1'^2 + 2 a_{12} x'_1 x'_2 + \cdots + a_{n-2,n-2} x_{n-2}'^2 + \frac{A_{n-1,n-1}}{\Delta_{mm}} \left((x_{n-1} - x_n)^2 - x_{n-1}^2 \right),$$

während gleichzeitig die x'_r $(r = 1, 2, \dots n-2)$ durch die Gleichungen beschränkt sind:

$$\begin{aligned} v_1 x'_1 + v_2 x'_2 + \cdots + v_{n-2} x'_{n-2} &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ t_1 x'_1 + t_2 x'_2 + \cdots + t_{n-2} x'_{n-2} &= 0. \end{aligned}$$

Man kann so, indem man die successiven Transformationen genügend weit fortsetzt, $n-m$ unabhängige Quadrate von f abtrennen, während die Variabeln der übrig bleibenden quadratischen Form, sie heisse etwa:

---

*) Es ist bekanntlich identisch

$$A \Delta_{mm} = A_{mm} A_{m-1,m-1} - A_{m,m-1}^2.$$

Für $A_{mm} = 0$ ist daher Δ_{mm} stets entgegengesetzten Vorzeichens wie A.

**) *Allgemein möge A_i die aus A für $m = i$ sich ergebende Determinante sein.*

$$u = a_{11}y_1^2 + 2a_{12}y_1y_2 + \cdots + a_{mm}y_m^2\ ^{*})$$

den Bedingungen zu genügen haben:

$$\begin{aligned} v_1y_1 + v_2y_2 + \cdots + v_my_m &= 0, \\ w_1y_1 + w_2y_2 + \cdots + w_my_m &= 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_1y_1 + t_2y_2 + \cdots + t_my_m &= 0. \end{aligned}$$

Die fortlaufenden Substitutionen sind jedenfalls so lange möglich, bis entweder m gleich $\nu+1$ oder gleich $\nu+2$ geworden ist. Die erstere Annahme ist erlaubt, wenn $A_{\nu+1} \lesseqgtr 0$, die zweite dagegen, wenn $A_{\nu+2} \lesseqgtr 0$ und $A_{\nu+1} = 0$. Für $A_{\nu+1} \lesseqgtr 0$ ist jedenfalls auch mindestens eine der Grössen $\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\alpha}}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots \nu+1)$ von Null verschieden, da in der Identität

$$A_{\nu+1}\frac{\partial^2 A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\alpha}\,\partial a_{\beta\beta}} = \frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\alpha}}\,\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\beta\beta}} - \left(\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\beta}}\right)^2$$

einestheils die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\alpha}\,\partial a_{\beta\beta}}$ sämmtlich verschwinden**), anderntheils nicht alle Subdeterminanten $\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\beta}}$ wegen

$$(n-\nu-1)A_{\nu+1} = \Sigma_\alpha\Sigma_\beta\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\alpha\beta}}\,a_{\alpha\beta} \quad (\alpha,\ \beta = 1, 2, \ldots \nu+1)$$

Null sein dürfen. Man kann daher das Lemma 3. nochmals anwenden, und die schliesslich übrig bleibende quadratische Form wird alsdann, wenn etwa $\alpha = \nu+1$ angenommen wird, von der Gestalt:

$$(16.) \qquad a_{11}\eta_1^2 + 2a_{12}\eta_1\eta_2 + \cdots + a_{\nu\nu}\eta_\nu^2,$$

mit den zugehörigen ν Bedingungen:

$$(16^a.) \qquad \begin{cases} v_1\eta_1 + v_2\eta_2 + \cdots + v_\nu\eta_\nu = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_1\eta_1 + t_2\eta_2 + \cdots + t_\nu\eta_\nu = 0. \end{cases}$$

Da nach der gemachten Voraussetzung $\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\nu+1,\nu+1}}$, somit auch, gemäss der Gleichung:

---

*) Das im Texte anzuwendende Raisonnement gilt natürlich auch dann, wenn nöthigenfalls die Combination 1, 2, ... m durch irgend eine andere Combination m^{ter} Classe aus den Zahlen 1, 2, ... n ersetzt werden müsste.

**) Cfr. *Baltzer*, Determinanten, (4. Ausgabe), §. 4, 2.

$$\frac{\partial A_{\nu+1}}{\partial a_{\nu+1,\nu+1}} = (-1)^{\nu} \Sigma \pm (v_1 w_2 \ldots t_\nu) \Sigma \pm (v_1 w_2 \ldots t_\nu) \text{ *)},$$

die Determinante $\Sigma \pm (v_1 w_2 \ldots t_\nu)$ selbst nicht Null ist, so muss nach (16^a.) $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_\nu = 0$ werden, d. h. die quadratische Form in (16.) verschwindet.

Wäre dagegen $A_{\nu+2} \gtrless 0$ und $A_{\nu+1} = 0$, so sind die Bedingungen des Lemma 4. erfüllt, und lassen sich zwei weitere Quadrate absondern, während die schliesslich übrig bleibende quadratische Form wieder Null wird.

Zusammenfassend kann man im Hinblicke auf das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen und auf den Umstand, dass die Determinanten A und Δ_{mm} in Lemma 4. entgegengesetzten Vorzeichens sind, das Theorem aussprechen:

Für $A_n \lesseqgtr 0$ lassen sich aus der Reihe 1, 2, ... n stets $n-\nu-1$ Zahlen $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ derart finden, dass von den Grössen

$$(17.) \qquad A_n, \quad \frac{\partial A_n}{\partial a_{\alpha\alpha}}, \quad \frac{\partial^2 A_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta}}, \quad \ldots \quad \frac{\partial^{n-\nu-1} A_n}{\partial a_{\alpha\alpha} \partial a_{\beta\beta} \ldots \partial a_{\varepsilon\varepsilon}}, \quad (-1)^{\nu}$$

keine zwei unmittelbar auf einander folgende verschwinden. Die Anzahl Zeichenwechsel, welche die Reihe (17.) *nach Weglassung der etwa vereinzelt auftretenden Nullen besitzt, ist genau gleich der Anzahl negativer Quadrate, welche eine den Bedingungen* (10.) *unterworfene quadratische Form f bei der Verwandlung in eine Summe von $(n-\nu)$ Quadraten darbietet.*

Aehnlich lässt sich auch das andere Theorem des Abschnitts I übertragen:

Soll f beim Bestehen der Gleichungen (10.) (*die $x_\varkappa$, $a_{\varkappa\lambda}$, $v_\varkappa$, $w_\varkappa \ldots t_\varkappa$ als reell vorausgesetzt*) *keine Zahlenwerthe mit entgegengesetztem Vorzeichen annehmen können, so muss die Reihe* (17.) *für mindestens eine Combination $(n-\nu-1)^{ter}$ Classe $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$ aus der Zahlenreihe 1, 2, ... n entweder lauter Zeichenwechsel oder lauter Zeichenfolgen darbieten.*

Um auf den Fall $A_n = 0$ näher einzugehen, wollen wir annehmen, dass sämmtliche Subdeterminanten verschwinden, welche aus A_n vermöge gleichzeitiger Unterdrückung von beliebigen $(m-1)$ Horizontalreihen und $(m-1)$ Verticalreihen der $a_{\varkappa\lambda}$ hervorgehen, dass dagegen mindestens *eine* Subdeterminante von Null verschieden sei, welche die $a_{\varkappa\lambda}$ nur in m Horizontalreihen und in m Verticalreihen enthält. Sei etwa, unter $\alpha, \beta, \ldots \varepsilon$

*) *Baltzer,* l. c.

irgend welche bestimmte m Zahlen aus der Reihe 1, 2, ... n verstanden:

$$c \equiv \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} & v_1 & \dots & t_1 \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} & v_2 & \dots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \dots & a_{m\varepsilon} & v_m & \dots & t_m \\ v_\alpha & v_\beta & \dots & v_\varepsilon & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ t_\alpha & t_\beta & \dots & t_\varepsilon & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \lesseqgtr 0.$$

Alsdann ist e. h. für alle Werthe der $x_\varkappa$

$$(18.)\qquad \begin{vmatrix} a_{1\alpha} & a_{1\beta} & \dots & a_{1\varepsilon} & v_1 & \dots & t_1 & f_1 \\ a_{2\alpha} & a_{2\beta} & \dots & a_{2\varepsilon} & v_2 & \dots & t_2 & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m\alpha} & a_{m\beta} & \dots & a_{m\varepsilon} & v_m & \dots & t_m & f_m \\ a_{i\alpha} & a_{i\beta} & \dots & a_{i\varepsilon} & v_i & \dots & t_i & f_i \\ v_\alpha & v_\beta & \dots & v_\varepsilon & 0 & \dots & 0 & v \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_\alpha & t_\beta & \dots & t_\varepsilon & 0 & \dots & 0 & t \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$$(i = m+1,\quad m+2\quad \dots\quad n)$$

welche Gleichung durch Entwickelung nach den Elementen der letzten Verticalreihe übergehen möge in:

$$(18^a.)\qquad f_i c + f_1 c_i^{(1)} + f_2 c_i^{(2)} + \dots + f_m c_i^{(m)} + v\mathfrak{B}_i + \dots + t\mathfrak{T}_i \equiv 0.$$

Für alle $x_\varkappa$, welche das System (10.) befriedigen, wird diese Gleichung (18^a.) in der Form vollkommen identisch mit (7^a.), so dass durch Substitutionen der Gestalt (8.) die den Bedingungen (10.) unterworfene Form f übergeht in:

$$(19.)\qquad f = a_{11}X_1^2 + 2a_{12}X_1X_2 + \dots + a_{mm}X_m^2,$$

und die Gleichungen $v = 0$, $w = 0$, ... $t = 0$ in:

$$(19^a.)\qquad \begin{cases} v_1X_1 + v_2X_2 + \dots + v_mX_m = 0, \\ w_1X_1 + w_2X_2 + \dots + w_mX_m = 0, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ t_1X_1 + t_2X_2 + \dots + t_mX_m = 0\text{*}). \end{cases}$$

*) Man erwäge, dass nach Definition der $c_i^{(i)}$ in (18^a.):
$v_i c + v_1 c_i^{(1)} + v_2 c_i^{(2)} + \dots + v_m c_i^{(m)} = 0$ etc. $(i = m+1,\ m+2, \dots)$.

Man hat also lediglich die Form $\sum\limits_i \sum\limits_k a_{ik} X_i X_k (i,\ k = 1,\ 2, \ldots m)$ zu behandeln, in der die Grössen X_i dem Systeme (19ᵃ.) Genüge leisten. Die zu diesem neuen Systeme gehörige Determinante A (cfr. 11.) besitzt einen von Null verschiedenen Werth, wie man leicht aus dem Umstande schliessen kann, dass die Gleichung (18ᵃ.) für alle Werthe von i zwischen 1 und n (incl. der Grenzen) giltig ist, dass also speciell auch (cfr. Schluss des Abschnitts I):

$$-ca_{hl} = a_{1l}c_h^{(1)} + a_{2l}c_h^{(2)} + \cdots + a_{ml}c_h^{(m)} + v_l\mathfrak{V}_l + \cdots + t_l\mathfrak{T}_l,$$
$$(h = \alpha,\ \beta, \ldots \varepsilon;\ l = 1,\ 2, \ldots m).$$

Stellt man nämlich die Determinante $\Sigma \pm c_\alpha^{(1)} c_\beta^{(2)} \ldots c_\varepsilon^{(m)}$ in der Form dar:

$$\begin{vmatrix} c_\alpha^{(1)} & c_\alpha^{(2)} & \ldots & c_\alpha^{(m)} & \mathfrak{V}_\alpha & \mathfrak{W}_\alpha & \ldots & \mathfrak{T}_\alpha \\ c_\beta^{(1)} & c_\beta^{(2)} & \ldots & c_\beta^{(m)} & \mathfrak{V}_\beta & \mathfrak{W}_\beta & \ldots & \mathfrak{T}_\beta \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\varepsilon^{(1)} & c_\varepsilon^{(2)} & \ldots & c_\varepsilon^{(m)} & \mathfrak{V}_\varepsilon & \mathfrak{W}_\varepsilon & \ldots & \mathfrak{T}_\varepsilon \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich nach dem Multiplicationstheorem der Determinanten:

$$A . \Sigma \pm (c_\alpha^{(1)} c_\beta^{(2)} \ldots c_\varepsilon^{(m)}) = (-1)^m c^{m+1}.$$

Darmstadt, im September 1880.

Ueber eine Eigenschaft der Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* in Athen.)

Man denke sich in der symmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \varDelta,$$

wo $a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu}$ ist, die Elemente $a_{\mu\nu}$ als ganze Functionen einer Veränderlichen ω mit realen Coefficienten und bezeichne den Coefficienten des ersten Elementes a_{11} in $\varDelta$ mit $\varDelta_{11}$, in $\varDelta_{11}$ den Coefficienten des ersten Elementes a_{22} mit $\varDelta_{11.22}$, in $\varDelta_{11.22}$ den Coefficienten des ersten Elementes a_{33} mit $\varDelta_{11.22.33}$ u. s. w., und bilde so die Reihe der offenbar symmetrischen Determinanten:

$$(1.) \quad \varDelta, \quad \varDelta_{11}, \quad \varDelta_{11.22}, \quad \varDelta_{11.22.33}, \quad \dots \quad \varDelta_{11.22 \dots nn},$$

von denen jede dem Coefficienten des ersten Elementes in der vorhergehenden gleich ist: dann ist die so gebildete Reihe der Functionen (1.) eine *Sturm*sche Reihe für die Gleichung $\varDelta = 0$ und für das Intervall von $\omega = a$ bis $\omega = b$ unter folgenden Bedingungen:

1.) Es soll keine von den Functionen (1.) identisch, d. i. für alle Werthe von ω verschwinden.

2.) Die Summe

$$(2.) \quad \sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} \varDelta_{1\mu} \varDelta_{1\nu} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, 3, \dots n \\ \nu = 1, 2, 3, \dots n \end{pmatrix}$$

soll in dem Intervalle $a \dots b$ nicht verschwinden.

Die Functionen (1.) behalten noch ihre Eigenschaft, wenn die zweite Bedingung durch die folgende ersetzt wird.

2'.) Die quadratische Form

$$\sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \quad (\mu = 1, 2, \dots n; \ \nu = 1, 2, \dots n),$$

deren Coefficienten von ω abhängen, soll für alle Werthe von ω, die im Intervalle $a \dots b$ liegen, definit sein und nur dann verschwinden, wenn alle $x_1, x_2, \dots x_n$ gleich Null werden.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo es in dem Intervalle $a \dots b$ keinen Werth von ω giebt, für den zwei auf einander folgende Functionen (1.) zugleich verschwinden: dann wird die angegebene Eigenschaft aus folgenden Eigenschaften der Functionen (1.) geschlossen:

α.) Das letzte Glied der Reihe verschwindet nie, denn es ist gleich 1.

β.) Wenn für einen Werth von ω eine der Functionen Δ_{11}, $\Delta_{11.22}$ u. s. w. verschwindet, so haben die zwei ihr benachbarten Functionen entgegengesetzte Zeichen, so dass die Anzahl der Zeichenwechsel der Reihe (1.), wenn ω, stetig wachsend, durch einen solchen Werth hindurchgeht, unverändert bleibt.

Dies folgt unmittelbar aus den Identitäten

$$(3.)\quad \begin{cases} \Delta_{11}.\Delta_{22} - \Delta_{12}^2 = \Delta.\Delta_{11.22}, \\ \Delta_{11.22}.\Delta_{11.33} - \Delta_{11.23}^2 = \Delta_{11}.\Delta_{11.22.33}, \\ \Delta_{11.22.33}.\Delta_{11.22.44} - \Delta_{11.22.34}^2 = \Delta_{11.22}.\Delta_{11.22.33.44}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

wobei $\Delta_{\mu\nu.\varrho\tau.gh}$ den Coefficienten des Productes $a_{\mu\nu}.a_{\varrho\tau}.a_{gh}$ in Δ, d. i. den Coefficienten des Productes $a_{\varrho\tau}.a_{gh}$ in $\Delta_{\mu\nu}$ bedeutet.

Die erste dieser Identitäten findet man, indem man das Product

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} & \dots & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} & \dots & \Delta_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

berechnet; die übrigen lassen sich auf ähnliche Weise aus den Unterdeterminanten Δ_{11}, $\Delta_{11.22}$ u. s. w. finden*).

γ.) Die Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ sind in dem Intervalle $a \dots b$ alle einfach.

Die Ableitungen von Δ und Δ_{11} nach ω sind folgenden Doppelsummen gleich:

---

*) *Baltzer*, Determinanten § 6, 2.

$$\Delta' = \Sigma a'_{\mu\nu}\Delta_{\mu\nu}, \quad \Delta'_{11} = \Sigma a'_{\mu\nu}\Delta_{11.\mu\nu} \quad \binom{\mu = 1, 2, \dots n}{\nu = 1, 2, \dots n},$$

und da zwischen den Unterdeterminanten die identischen Gleichungen

$$\Delta_{11}.\Delta_{\mu\nu} - \Delta_{1\mu}.\Delta_{1\nu} = \Delta.\Delta_{11.\mu\nu}$$

bestehen (*Baltzer*, l. c.), so folgt, wenn man mit $a'_{\mu\nu}$ multiplicirt und über alle Werthe von μ, ν summirt,

$$(4.) \quad \Delta_{11}\Delta' - \Delta'_{11}\Delta = \sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu}\Delta_{1\mu}\Delta_{1\nu},$$

und da für eine Wurzel höherer Ordnung Δ und Δ' zugleich verschwinden, so würde auch die Summe verschwinden, was der Voraussetzung 2.) widerspricht.

δ.) Wenn ω, alle Werthe $a \dots b$ durchlaufend, durch eine Wurzel der Gleichung $\Delta = 0$ hindurchgeht, so wird in der Reihe (1.) ein Zeichenwechsel verloren, wenn die Summe (4.) positiv, und gewonnen, wenn dieselbe Summe negativ ist.

Die Formel (4.) lässt sich auch so schreiben:

$$(5.) \quad \Delta^2 . \frac{d\left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta}\right)}{d\omega} = -\Sigma a'_{\mu\nu}\Delta_{1\mu}\Delta_{1\nu} \quad \binom{\mu = 1, 2, 3, \dots n}{\nu = 1, 2, 3, \dots n}.$$

Wenn nun die Summe (4.) für alle Werthe $\omega = a \dots b$ stets positiv bleibt, so wird der Quotient $\frac{\Delta_{11}}{\Delta}$ bei wachsendem ω stets abnehmen und allemal von $-\infty$ zu $+\infty$ übergehen, wenn Δ verschwindet, so dass dabei in der Reihe (1.) jedesmal ein Zeichenwechsel verloren geht. Im Gegentheil wird bei jeder Wurzel ein Zeichenwechsel gewonnen, wenn die Summe immer negativ bleibt. Aus diesen Eigenschaften folgt unmittelbar die angezeigte Eigenschaft der Functionen (1.).

Wenn für gewisse Werthe von ω (im Intervalle $a \dots b$) zwei oder mehrere auf einander folgende Functionen (1.) gleichzeitig verschwinden, so kann man stets durch beliebig kleine Variationen der Coefficienten von $a_{\mu\nu}$ das gleichzeitige Verschwinden zweier auf einander folgenden verhindern.

Es verschwinde die Function $\Delta_{11.22\dots\varrho\varrho}$; dann ist

$$\Delta_{11.22\dots(\varrho-1)(\varrho-1)} = -a^2_{\varrho,\varrho+1}.\Delta_{11.22\dots(\varrho+1)(\varrho+1)} + \cdots,$$

und wenn man schon das gleichzeitige Verschwinden der Functionen $\Delta_{11.22\dots\varrho\varrho}$ und $\Delta_{11.22\dots(\varrho+1)(\varrho+1)}$ verhindert hat (was für die zwei letzten der Fall ist), so kann man die Coefficienten von $a_{\varrho(\varrho+1)}$, welche in den folgenden Functionen

nicht vorkommen, beliebig wenig und so variiren, dass die Function $\Delta_{11\ldots(\varrho-1)(\varrho-1)}$ nicht verschwinde.

Da nun offenbar die Variationen der Coefficienten so klein gewählt werden können, dass die der variirten Determinante $\Delta+\delta\Delta$ entsprechende Summe

$$\Sigma a'_{\mu\nu}\Delta_{1\mu}\Delta_{1\nu}+\delta\Sigma a'_{\mu\nu}\Delta_{1\mu}\Delta_{1\nu}$$

für alle Werthe $\omega = a\ldots b$ dasselbe Zeichen beibehält wie die ursprüngliche (2.) und die Eigenschaften α.), β.), γ.), δ.) für die Determinante $\Delta+\delta\Delta$ bestehen bleiben, so folgt, dass die Anzahl ihrer Wurzeln, welche zwischen a und b liegen, von der Reihe

$$(6.)\qquad \Delta+\delta\Delta,\quad \Delta_{11}+\delta\Delta_{11},\quad \Delta_{11.22}+\delta\Delta_{11.22}\ \ldots\ \Delta_{11.22\ldots nn}$$

angegeben wird, indem man statt ω die Werthe a und b einsetzt.

Man kann aber annehmen, ohne der Allgemeinheit zu schaden, dass für $\omega = a$ und für $\omega = b$ keine von den Functionen (1.) verschwindet; folglich werden beide Reihen (1.) und (6.) bei hinreichend kleinen Variationen dieselbe Anzahl Zeichenwechsel haben und die Anzahl der Wurzeln der variirten Gleichung $\Delta+\delta\Delta = 0$, welche im Intervalle $a\ldots b$ liegen, wird noch von der Reihe (1.) gegeben.

Die beiden Gleichungen $\Delta = 0$ und $\Delta+\delta\Delta = 0$ haben aber im Intervalle $a\ldots b$ gleich viele reale Wurzeln; denn bei hinreichend kleinen Variationen der Coefficienten (welche real vorausgesetzt sind) bleiben die imaginären Wurzeln imaginär und die realen wieder real, mit Ausnahme der realen Wurzeln höherer Ordnung, von denen einige imaginär werden können; solche Wurzeln hat aber die Gleichung $\Delta = 0$ nicht.

Daraus folgt, dass, wenn die Bedingungen 1.) und 2.) erfüllt sind, die Anzahl der realen Wurzeln der Gleichung $\Delta = 0$ immer von der Reihe

$$\Delta,\quad \Delta_{11},\quad \Delta_{11.22},\quad \ldots\quad \Delta_{11.22\ldots nn}$$

angegeben wird.

Sei jetzt die quadratische Form

$$(7.)\qquad \Sigma a'_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$$

für alle Werthe $\omega = a\ldots b$ definit und von Null verschieden, ausser wenn alle x_μ gleich Null sind. Dann werde ich zeigen, dass die Reihe der Functionen (1.) noch dieselbe Eigenschaft hat.

Unter den gemachten Voraussetzungen 1.) und 2'.) verschwindet die Summe

$$(8.)\qquad \Sigma a'_{\mu\nu}\, \varDelta_{1\mu}\varDelta_{1\nu}$$

nur, wenn $\varDelta_{11} = \varDelta_{12} = \varDelta_{13} = \cdots = \varDelta_{1n}$ alle gleich Null werden. Wenn es nun im Intervalle $a \dots b$ keinen Werth giebt, für den alle $\varDelta_{1\mu}$ gleich Null werden, so bleibt die Summe (8.) von Null verschieden; also ist nach dem Vorhergehenden der Satz bewiesen. Giebt es aber solche Werthe, und ist p einer derselben, so genügt es, den Satz für das beliebig kleine Intervall $p-\varepsilon \dots p+\varepsilon$ zu beweisen, um daraus seine Gültigkeit für das ganze Intervall $a \dots b$ zu schliessen. Zu dem Ende brauche ich folgende Sätze.

1.) Der Grad des Nullwerdens zweier auf einander folgenden Functionen (1.) ist entweder gleich oder um Eins verschieden.

Wenn D irgend eine der Determinanten (1.) bedeutet, z. B. die $\varDelta_{11\dots(\varrho-1)(\varrho-1)}$ und $D_{\varrho\varrho}$ die nächstfolgende, und sind $D_{\varrho\varrho}, D_{\varrho,\varrho+1}, \dots D_{\varrho n}$ die Coefficienten der Elemente $a_{\varrho\varrho}, a_{\varrho,\varrho+1}, \dots a_{\varrho n}$ in D, so giebt die Gleichung (4.), auf die symmetrische Determinante D angewandt,

$$(9.)\qquad DD'_{\varrho\varrho} - D_{\varrho\varrho}D' = -\sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu}\, D_{\varrho\mu}.D_{\varrho\nu} \quad \begin{pmatrix}\mu = \varrho,\ \varrho+1, \dots n\\ \nu = \varrho,\ \varrho+1, \dots n\end{pmatrix}.$$

Die quadratische Form

$$\Sigma a'_{\mu\nu}\, x_\mu x_\nu \quad \begin{pmatrix}\mu = \varrho,\ \varrho+1, \dots n\\ \nu = \varrho,\ \varrho+1, \dots n\end{pmatrix}$$

geht aus der Form (7.) hervor, indem man $x_1 = x_2 = \cdots = x_{\varrho-1} = 0$ setzt; folglich ist auch diese definit (für $\omega = a \dots b$) und verschwindet nur für $x_\varrho = x_{\varrho+1} = \cdots = x_n = 0$, so dass auch die Summe (9.) nur verschwindet, wenn alle $D_{\varrho\varrho} = D_{\varrho,\varrho+1} = \cdots = D_{\varrho n} = 0$ sind.

Es werde jetzt für $\omega = p$ die Determinante D gleich Null und zwar vom Grade λ. Wenn für $\omega = p$ die nächstfolgende Determinante $D_{\varrho\varrho}$ nicht verschwindet, so ist die Summe links (9.) von Null verschieden, also auch D' von Null verschieden, und desshalb $\lambda = 1$. Wird aber auch $D_{\varrho\varrho}$ gleich Null, so sei τ der Grad ihres Nullwerdens. Wenn τ ungleich λ ist, so ist der Factor $\omega - p$ in der rechten Seite der Gleichung (9.) $(\lambda+\tau-1)$-mal enthalten und nicht mehr: denn es ist

$$\begin{aligned} D &= (\omega-p)^{\lambda}.f(\omega), \quad f(p) \gtrless 0,\\ D_{\varrho\varrho} &= (\omega-p)^{\tau}.\varphi(\omega), \quad \varphi(p) \gtrless 0; \end{aligned}$$

folglich

$$DD'_{\varrho\varrho} - D'D_{\varrho\varrho} = (\omega-p)^{\lambda+\tau-1}.\{(\tau-\lambda)f(\omega)\varphi(\omega) + (\omega-p)(\varphi' f - \varphi f')\}.$$

Hieraus schliessen wir, dass auch die linke Seite der Gleichung (9.) durch die $(\lambda+\tau-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\omega-p$ theilbar sein muss, aber durch keine höhere.

Dieses aber geschieht nur dann, wenn alle $D_{\varrho\varrho}, D_{\varrho,\varrho+1}, \dots D_{\varrho n}$ durch $(\omega-p)^{\frac{\lambda+\tau-1}{2}}$ theilbar sind. (Dass die Zahl $\lambda+\tau-1$ eine gerade Zahl sein muss, sieht man unmittelbar aus der Summe selbst, weil ihr Zeichen unverändert bleiben muss.) In der That findet man, wenn man die Summe zweimal differentiirt und beachtet, dass $D_{\varrho\varrho} = D_{\varrho,\varrho+1} = \cdots = D_{\varrho n}$ alle Null für $\omega = p$ werden,

$$\sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} D'_{\varrho\mu} D'_{\varrho\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \omega = p.$$

Folglich ist

$$D'_{\varrho\mu} = 0 \quad (\mu = \varrho, \ \varrho+1, \ \dots \ n) \quad \text{für} \quad \omega = p.$$

Durch viermaliges Differentiiren derselben Summe ergiebt sich ebenfalls

$$\sum_{\mu,\nu} a'_{\mu\nu} D''_{\varrho\mu} D''_{\varrho\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \omega = p,$$

also

$$D''_{\varrho\mu} = 0 \quad (\mu = \varrho, \ \varrho+1, \ \dots \ n).$$

Auf diese Weise findet man, wenn man $(\lambda+\tau-1)$-mal differentiirt, dass alle $D_{\varrho\varrho}, D_{\varrho,\varrho+1}, \dots D_{\varrho n}$ und ihre Ableitungen bis zur Ordnung $\frac{1}{2}(\lambda+\tau-1)$ verschwinden müssen. Es sind also alle $D_{\varrho\mu}$ durch die $\frac{1}{2}(\lambda+\tau-1)^{\text{te}}$ Potenz von $\omega-p$ theilbar.

Die Function $D_{\varrho\varrho}$ ist aber durch die Potenz τ theilbar und durch keine höhere; es muss also sein

$$\tau \geqq \frac{\lambda+\tau-1}{2}$$

oder

$$\tau \geqq \lambda-1.$$

Es ist aber auch

$$D = \sum_i a_{\varrho i} D_{\varrho i} \quad (i = \varrho, \ \varrho+1, \ \dots \ n),$$

und da alle $D_{\varrho i}$ durch $(\omega-p)^{\frac{1}{2}(\lambda+\tau-1)}$ theilbar sind, so ist auch D durch dieselbe Potenz theilbar: folglich ist

$$\lambda \geqq \tfrac{1}{2}(\lambda+\tau-1)$$

oder

$$\lambda \geqq \tau-1.$$

Daraus folgt, dass, wenn nicht $\lambda = \tau$ ist, ihr Unterschied nicht grösser sein kann als Eins.

2.) Wenn ω, alle Werthe von $p-\varepsilon$ bis $p+\varepsilon$ stetig durchlaufend, durch den Werth p hindurchgeht, so werden (bei positiver Summe) von zwei auf einander folgenden Functionen der Reihe (1.)

$$D, \quad D_{\varrho\varrho}$$

$\lambda-\tau$ Zeichenwechsel verloren, wo λ den Grad des Nullwerdens des ersten und τ denjenigen des zweiten bedeutet.

Die Formel (9.) kann auch so geschrieben werden:

$$(10.) \qquad D^2 \frac{d\left(\frac{D_{\varrho\varrho}}{D}\right)}{d\omega} = -\sum_{\mu,\nu} a'_{\mu,\nu} D_{\varrho\mu} D_{\varrho\nu}.$$

Wenn nun $\lambda-\tau=1$ ist, so sehen wir hieraus, dass der Quotient $\frac{D_{\varrho\varrho}}{D}$, der für $\omega=p$ unendlich gross wird, bei wachsendem ω beständig abnehmen muss; folglich geht er von $-\infty$ zu $+\infty$ über, und desshalb wird ein Zeichenwechsel verloren.

Wenn aber $\lambda-\tau=-1$ ist, so wird der Quotient Null für $\omega=p$ und da er immer abnehmen muss, so folgt, dass er von $+$ zu $-$ übergeht, also wird ein Zeichenwechsel gewonnen.

Der Fall, wo $\lambda=\tau$ ist, ist von selbst klar.

Bei negativer Summe (7.) geschieht das in umgekehrter Weise.

Dieses vorausgeschickt, nehme man das Intervall $p-\varepsilon \dots p+\varepsilon$, so klein, dass Δ in ihm nur für $\omega=p$ verschwinde, und sei m der Grad seines Nullwerdens; dann werde ich zeigen, dass, indem ω stetig wachsend dieses Intervall durchläuft, in der Reihe

$$\Delta, \quad \Delta_{11}, \quad \Delta_{11.22}, \quad \dots \quad \Delta_{11.22\dots nn}$$

m Zeichenwechsel verloren gehen (bei positiver Summe), oder gewonnen werden (bei negativer Summe).

Sei m_1 der Grad des Nullwerdens von Δ_n, m_2 derjenige von $\Delta_{11.22}$ u. s. w.: Vom ersten Glied der Reihe (1.) zum zweiten werden $m-m_1$ Zeichenwechsel verloren, vom zweiten zum dritten m_1-m_2, vom dritten zum vierten m_2-m_3 u. s. w. fort: Es werden also in der ganzen Reihe m Zeichenwechsel verloren.

Es folgt hieraus, dass für jedes Intervall $a \dots b$, innerhalb dessen die quadratische Form $\Sigma a'_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ definit ist und nur für $x_1=x_2=\dots=x_n=0$ verschwindet, die Functionen

$$\Delta, \quad \Delta_{11}, \quad \Delta_{11.22}, \quad \dots \quad \Delta_{11.22\dots nn}$$

für die Gleichung $\Delta=0$ eine *Sturm*sche Reihe bilden.

Anwendung.

Sei die Gleichung gegeben:

$$(11.)\quad \begin{vmatrix} A_{11}-\omega, & A_{12}, & \dots & A_{1n} \\ A_{21}, & A_{22}-\omega, & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}, & A_{n2}, & \dots & A_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0, \quad A_{\mu\nu} = A_{\nu\mu}.$$

Die quadratische Form (7.) ist hier $-\sum_{\mu} x_{\mu}^2$; sie bleibt stets negativ und verschwindet nur, wenn alle x_{μ} Null werden. Folglich ist die Reihe der Functionen

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\omega & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn}-\omega \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_{22}-\omega & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn}-\omega \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_{33}-\omega & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn}-\omega \end{vmatrix}, \dots A_{nn}-\omega, \ 1$$

für jedes Intervall eine *Sturm*sche Reihe.

Die Anfangsglieder dieser Functionen sind

$$(-\omega)^n, \quad (-\omega)^{n-1}, \quad (-\omega)^{n-2}, \quad \dots \quad -\omega, \quad 1,$$

woraus man unmittelbar sieht, dass alle Wurzeln der Gleichung real sind.

Wenn die quadratische Form $\sum_{\mu,\nu} A_{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu}$ definit und als Summe von nicht weniger als n Quadraten darstellbar ist, so müssen alle Wurzeln der Gleichung (11.) positiv oder alle negativ sein. Folglich sind die Determinanten

$$\begin{vmatrix} A_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_{22} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_{33} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad A_{nn}, \quad 1$$

entweder alle positiv, oder abwechselnd positiv und negativ.

Ich will noch bemerken, dass sich die Realität der Wurzeln der Gleichung dritten Grades

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11}-\omega & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\omega & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\omega \end{vmatrix} = 0,$$

welche bei der Bestimmung der Hauptaxen der Flächen zweiter Ordnung auftritt, mit Hülfe der Unterdeterminanten am leichtesten beweisen lässt.

Zu dem Ende nehme man das A_{23} als verschieden von Null an, und bezeichne die Wurzeln der Gleichung $\Delta_{11} = 0$, welche real und ungleich sind, mit λ und μ (sei $\lambda < \mu$): dann zeigt die Identität

$$\Delta_{11}\Delta_{22} - \Delta_{12}^2 = \Delta.(A_{33}-\omega),$$

dass die Function $\varDelta.(A_{33}-\omega)$, welche mit ω^4 anfängt,

$$\begin{array}{lll} \text{für} & \omega = -\infty & \text{positiv,} \\ \text{für} & \omega = \lambda & \text{nicht positiv,} \\ \text{für} & \omega = \mu & \text{nicht positiv,} \\ \text{für} & \omega = -\infty & \text{positiv} \end{array}$$

ist; folglich hat die Gleichung vierten Grades $\varDelta.(A_{33}-\omega)=0$ eine reale Wurzel im Intervalle $-\infty\dots\lambda$ und noch eine im Intervalle $\mu\cdots+\infty$; sie hat aber noch die Wurzel $\omega=A_{33}$, welche, wie leicht zu sehen, zwischen λ und μ liegt. Sie hat also lauter reale Wurzeln, und deshalb hat auch die Gleichung $\varDelta=0$ drei reale Wurzeln.

Sei zweitens die Gleichung gegeben

$$(12.) \qquad |A_{\mu\nu}\omega+B_{\mu\nu}|=0 \qquad (\mu,\nu=1,\ 2,\ \dots\ n),$$

wobei $A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}$ und $B_{\mu\nu}=B_{\nu\mu}$ ist. Unter der Voraussetzung, dass die quadratische Form $\Sigma A_{\mu\nu}x_\mu x_\nu$ definit ist und nur für $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ verschwindet, bilden die Functionen $\varDelta$, $\varDelta_{11}$ u. s. w. für jedes Intervall eine *Sturm*sche Reihe. Die Anfangsglieder sind nun

$$P\omega^n,\quad P_{11}\omega^{n-1},\quad P_{11.22}\omega^{n-2},\quad \dots\quad A_{nn}\omega,\quad 1,$$

wobei P, P_{11}, $P_{11.22}$ u. s. w. die Determinante $|A_{\mu\nu}|$ und ihre Unterdeterminanten bedeuten, und da sie entweder alle positiv oder abwechselnd positiv und negativ sind, so folgt, dass alle Wurzeln der Gleichung (12.) unter der gemachten Voraussetzung real sind. Bedeuten $\varphi_1(\omega)$, $\varphi_2(\omega)$, $\dots$ $\varphi_n(\omega)$ beliebige ganze Functionen von ω, deren Ableitungen $\varphi_1'(\omega)$ $\dots$ $\varphi_n'(\omega)$ alle stets positiv oder alle stets negativ bleiben, so hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(\omega) & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & \varphi_2(\omega) & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & \varphi_n(\omega) \end{vmatrix} = 0 \quad (A_{\mu\nu}=A_{\nu\mu}=\text{const.})$$

immer nur n reale Wurzeln.

Endlich bemerke ich, dass, wenn die Determinante $|a'_{\mu\nu}|$ das Quadrat einer beliebigen Determinante ist, der Satz auf die symmetrische Determinante

$$|a_{\mu\nu}+\omega\delta_{\mu\nu}|,$$

wo $\delta_{\mu\nu}=0$, wenn $\mu\lessgtr\nu$, und $\delta_{\mu\nu}$ gleich einer positiven Zahl, wenn $\mu=\nu$, immer anwendbar ist.

In der That, wenn $|a'_{\mu\nu}| = |A_{\mu\nu}|^2$ vorausgesetzt wird, so ist

$$a'_{\mu\nu} = \sum_i A_{\mu i} A_{\nu i};$$

folglich ist die Summe (7.)

$$\Sigma a'_{\mu\nu} \Delta_{1\mu} \Delta_{1\nu} = \sum_i (\sum_\mu A_{\mu i} \Delta_{1\mu})^2 + \sum_\mu \delta_{\mu\mu} . \Delta^2_{1\mu},$$

und wenn die Determinante $|A_{\mu\nu}|$ nie verschwindet, so gilt der bewiesene Satz für die Gleichung $|a_{\mu\nu}| = 0$.

Athen, den 3. December 1880.

Ueber ein Kriterium von *Steiner* in der Theorie der Kegelschnitte.

(Von Herrn *Eugen Hunyady* in Budapest.)

Steiner bestimmt in seiner Abhandlung „Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte*)" eines durch drei Punkte gehenden Kegelschnittes von gegebenem Mittelpunkt, die Art desselben, indem er das folgende Kriterium ausspricht:

„Sind A, B, C drei Punkte eines Kegelschnittes und P sein Mittelpunkt, so lässt sich die Art des fraglichen Kegelschnittes auf folgende Weise bestimmen: Sind $A'B'C'$ die Mittelpunkte der Seiten des Dreieckes ABC, so theilen die Verbindungsgeraden der Punkte $A'B'C'$ die Ebene in sieben Theile, von welchen einer im Inneren des Dreieckes $A'B'C'$ liegt, drei sich über die Ecken und drei sich über die Seiten erheben; liegt nun der Mittelpunkt P in den ersten vier Theilen der Ebene, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse, wenn hingegen P in den letzten drei Theilen liegt, dann ist der Kegelschnitt eine Hyperbel."

Die folgenden Zeilen haben den Zweck, das Kriterium von *Steiner* analytisch zu beweisen.

1. Bezeichnet man mit 1, 2, 3 die drei ersten Punkte und mit 4 den Mittelpunkt, ferner mit 1′, 2′, 3′ die Mittelpunkte der Dreiecksseiten 23, 31, 12, so hat man unter Beibehaltung der in der Abhandlung „Ueber die von *Möbius* gegebenen Kriterien etc. etc.**)" gebrauchten Bezeichnungen,

---

*) Dieses Journal Bd. 30, p. 97.

**) Dieses Journal Bd. 89, p. 70.

für den durch die Punkte 1, 2, 3 gehenden Kegelschnitt die folgende Gleichung:

$$(1.)\qquad \lambda_1(120)(310)+\lambda_2(120)(230)+\lambda_3(310)(230) = 0.$$

Um die Art dieses Kegelschnittes zu bestimmen vergleiche man seine Gleichung mit der folgenden:

$$(2.)\qquad ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f = 0,$$

wodurch sich für *a*, *b*, etc. die folgenden Werthe ergeben:

$$(3.)\quad \begin{cases} 2a = \lambda_1(\xi_{12}\xi_{31}+\xi_{31}\xi_{12})+\lambda_2(\xi_{12}\xi_{23}+\xi_{23}\xi_{12})+\lambda_3(\xi_{31}\xi_{23}+\xi_{23}\xi_{31}), \\ 2c = \lambda_1(\eta_{12}\eta_{31}+\eta_{31}\eta_{12})+\lambda_2(\eta_{12}\eta_{23}+\eta_{23}\eta_{12})+\lambda_3(\eta_{31}\eta_{23}+\eta_{23}\eta_{31}), \\ 2f = \lambda_1(\zeta_{12}\zeta_{31}+\zeta_{31}\zeta_{12})+\lambda_2(\zeta_{12}\zeta_{23}+\zeta_{23}\zeta_{12})+\lambda_3(\zeta_{31}\zeta_{23}+\zeta_{23}\zeta_{31}), \\ 2b = \lambda_1(\xi_{12}\eta_{31}+\xi_{31}\eta_{12})+\lambda_2(\xi_{12}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{12})+\lambda_3(\xi_{31}\eta_{23}+\xi_{23}\eta_{31}), \\ 2d = \lambda_1(\xi_{12}\zeta_{31}+\xi_{31}\zeta_{12})+\lambda_2(\xi_{12}\zeta_{23}+\xi_{23}\zeta_{12})+\lambda_3(\xi_{31}\zeta_{23}+\xi_{23}\zeta_{31}), \\ 2e = \lambda_1(\eta_{12}\zeta_{31}+\eta_{31}\zeta_{12})+\lambda_2(\eta_{12}\zeta_{23}+\eta_{23}\zeta_{12})+\lambda_3(\eta_{31}\zeta_{23}+\eta_{23}\zeta_{31}). \end{cases}$$

Nun ist der Kegelschnitt (2.) Ellipse oder Hyperbel, je nachdem

$$ac-b^2 \gtrless 0.$$

Man hat also, um die Art des Kegelschnittes (1.) zu bestimmen, zuerst die Grösse $ac-b^2$ durch Einsetzung der Werthe in (3.) zu berechnen. Um diese Berechnung auszuführen, schlage man den folgenden Weg ein:

$$(4.)\qquad 4\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 0 \\ 2b & 2c & 0 \\ 2d & 2e & 1 \end{vmatrix}$$

und denke sich in der letzten Determinante die Werthe aus (3.) eingesetzt; eine Umformung derselben wird dadurch bewirkt, dass man die Gleichung (4.) mit der folgenden multiplicirt:

$$(5.)\qquad (123) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Durch Multiplication nach Colonnen ergiebt sich dann:

$$4(ac-b^2).(123) = \begin{vmatrix} (123)\{\lambda_2\xi_{12}+\lambda_3\xi_{31}\} & (123)\{\lambda_1\xi_{12}+\lambda_3\xi_{23}\} & (123)\{\lambda_1\xi_{31}+\lambda_2\xi_{23}\} \\ (123)\{\lambda_2\eta_{12}+\lambda_3\eta_{31}\} & (123)\{\lambda_1\eta_{12}+\lambda_3\eta_{23}\} & (123)\{\lambda_1\eta_{31}+\lambda_2\eta_{23}\} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

oder

$$(6.)\quad 4(ac-b^2) = -(123)\begin{vmatrix} \lambda_2\xi_{12}+\lambda_3\xi_{31} & \lambda_1\xi_{12}+\lambda_3\xi_{23} & \lambda_1\xi_{31}+\lambda_2\xi_{23} & 0 \\ \lambda_2\eta_{12}+\lambda_3\eta_{31} & \lambda_1\eta_{12}+\lambda_3\eta_{23} & \lambda_1\eta_{31}+\lambda_2\eta_{23} & 0 \\ \lambda_2\zeta_{12}+\lambda_3\zeta_{31} & \lambda_1\zeta_{12}+\lambda_3\zeta_{23} & \lambda_1\zeta_{31}+\lambda_2\zeta_{23} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

und durch abermalige Multiplication mit

$$(7.)\qquad (123) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

erhält man:

$$4(ac-b^2) = -\begin{vmatrix} 0 & (123)\lambda_3 & (123)\lambda_2 & 1 \\ (123)\lambda_3 & 0 & (123)\lambda_1 & 1 \\ (123)\lambda_2 & (123)\lambda_1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$(8.)\qquad 4(ac-b^2) = -(123)^2\begin{vmatrix} 0 & \lambda_3 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Es ist also der Kegelschnitt (1.) Ellipse oder Hyperbel, je nachdem

$$(9.)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \lambda_3 & \lambda_2 & 1 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_1 & 1 \\ \lambda_2 & \lambda_1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \lessgtr 0.$$

2. Der Mittelpunkt 4 des Kegelschnittes (1.) genügt den folgenden Gleichungen:

$$(10.)\quad \begin{cases} \lambda_1(u_2\xi_{12}+u_3\xi_{31})+\lambda_2(u_1\xi_{12}+u_3\xi_{23})+\lambda_3(u_1\xi_{31}+u_2\xi_{23}) = 0, \\ \lambda_1(u_2\eta_{12}+u_3\eta_{31})+\lambda_2(u_1\eta_{12}+u_3\eta_{23})+\lambda_3(u_1\eta_{31}+u_2\eta_{23}) = 0, \end{cases}$$

wenn der Kürze halber gesetzt wird:

$$(11.)\qquad (234)=u_1,\quad (314)=u_2,\quad (124)=u_3,\quad (123)=u_4.$$

Aus (10.) ergiebt sich für die Grössen λ:

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 =$$
$$\begin{vmatrix} u_1\xi_{12}+u_3\xi_{23} & u_1\xi_{31}+u_2\xi_{23} \\ u_1\eta_{12}+u_3\eta_{23} & u_1\eta_{31}+u_2\eta_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_1\xi_{31}+u_2\xi_{23} & u_2\xi_{12}+u_3\xi_{31} \\ u_1\eta_{31}+u_2\eta_{23} & u_2\eta_{12}+u_3\eta_{31} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} u_2\xi_{12}+u_3\xi_{31} & u_1\xi_{12}+u_3\xi_{23} \\ u_2\eta_{12}+u_3\eta_{31} & u_1\eta_{12}+u_3\eta_{23} \end{vmatrix}.$$

Durch Transformation der rechts stehenden Determinanten ergiebt sich ferner, wenn man z. B. die erste so schreibt:

$$\begin{vmatrix} u_1\xi_{12}+u_3\xi_{23} & u_1\xi_{31}+u_2\xi_{23} & 0 \\ u_1\eta_{12}+u_3\eta_{23} & u_1\eta_{31}+u_2\eta_{23} & 0 \\ u_1\zeta_{12}+u_3\zeta_{23} & u_1\zeta_{31}+u_2\zeta_{23} & 1 \end{vmatrix}$$

und dann mit (5.) multiplicirt:

$$u_1 u_4(-u_1+u_2+u_3),$$

und in ähnlicher Weise für die zweite und dritte Determinante:

$$u_2 u_4(u_1-u_2+u_3),$$
$$u_3 u_4(u_1+u_2-u_3),$$

so dass man hat:

$$\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3 = u_1(-u_1+u_2+u_3):u_2(u_1-u_2+u_3):u_3(u_1+u_2-u_3),$$

oder wenn man mit ϱ einen Proportionalitätsfactor bezeichnet:

$$(12.)\quad \begin{cases} \lambda_1 = \varrho u_1(-u_1+u_2+u_3), \\ \lambda_2 = \varrho u_2(u_1-u_2+u_3), \\ \lambda_3 = \varrho u_3(u_1+u_2-u_3), \end{cases}$$

durch deren Einsetzung die Bedingungen in (9.) nach Vernachlässigung des Factors ϱ^2 in die folgenden übergehen:

$$\begin{vmatrix} 0 & u_3(u_1+u_2-u_3) & u_2(u_1-u_2+u_3) & 1 \\ u_3(u_1+u_2-u_3) & 0 & u_1(-u_1+u_2+u_3) & 1 \\ u_2(u_1-u_2+u_3) & u_1(-u_1+u_2+u_3) & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \lesseqgtr 0.$$

Multiplicirt man ferner in der links stehenden Determinante die Zeilen der Reihe nach mit u_1, u_2, u_3, $u_1u_2u_3$ und dividirt die ersten drei Colonnen durch u_2u_3, u_1u_3, u_1u_2, so hat man ferner:

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1+u_2-u_3 & u_1-u_2+u_3 & u_1 \\ u_1+u_2-u_3 & 0 & -u_1+u_2+u_3 & u_2 \\ u_1-u_2+u_3 & -u_1+u_2+u_3 & 0 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \lesseqgtr 0.$$

Zieht man dann von den ersten drei Colonnen die vierte ab, so ist

$$\begin{vmatrix} -u_1 & u_2-u_3 & -u_2+u_3 & u_1 \\ u_1-u_3 & -u_2 & -u_1+u_3 & u_2 \\ u_1-u_2 & -u_1+u_2 & -u_3 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} \lesseqgtr 0,$$

und durch Multiplication der links stehenden Determinante mit:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 16$$

geht die vorhergehende Bedingung in die folgende über:

$$-(u_1+u_2+u_3)(-u_1+u_2+u_3)(u_1-u_2+u_3)(u_1+u_2-u_3) \lesseqgtr 0.$$

Nun ergiebt sich leicht nach Berücksichtigung der Eingangs gewählten Bezeichnungen für die Mittelpunkte der Seiten 23, 31, 12

$$\begin{aligned} u_1+u_2+u_3 &= 4(1'2'3') \\ -u_1+u_2+u_3 &= 4(2'3'4) \\ u_1-u_2+u_3 &= -4(1'3'4) \\ u_1+u_2-u_3 &= 4(1'2'4), \end{aligned}$$

wonach die vorhergehenden Bedingungen in die folgenden übergehen:

$$(13.) \qquad (1'2'3')(2'3'4)(1'3'4)(1'2'4) \lesseqgtr 0.$$

Diese enthalten das Eingangs erwähnte Kriterium, indem man ähnlich wie in der früher citirten Abhandlung „Ueber die von *Möbius* gegebenen Kriterien" etc. zu dem Schluss gelangt, dass für die zweite der obigen Bedingungen die vier Punkte 1', 2', 3' und 4 gegen einander eine solche Lage haben, dass je drei derselben den vierten Punkt ausschliessen, während die erste Bedingung eine derartige gegenseitige Lage der vier Punkte bedingt, dass einer derselben in dem von den drei übrigen bestimmten Dreieck liegt, mit Rücksicht hierauf kann das *Steiner*sche Kriterium noch wie folgt ausgesprochen werden:

„Ist ein Kegelschnitt durch drei Punkte und den Mittelpunkt gegeben, so ist der so bestimmte Kegelschnitt eine Hyperbel, wenn sich die vier ge-

gebenen Punkte gegenseitig ausschliessen, dagegen ist der fragliche Kegelschnitt für jede andere Lage der vier Punkte eine Ellipse".

Ich benütze diese Gelegenheit, um zu erwähnen, dass Herr *Durège* auf mehrere Fehler, die sich in der Abhandlung „Ueber die von *Möbius* gegebenen Kriterien etc." d. J. Bd. 89 befinden, aufmerksam gemacht hat. Was die Fehler selbst betrifft, glaube ich auf den berichtigenden Aufsatz des Herrn *Durège* (Sitzungsberichte der Wiener Akad. Jhrg. 1880 Juniheft) verweisen zu dürfen.

Budapest im Januar 1881.

Ueber das sogenannte Restproblem in den chinesischen Werken Swan-king von *Sun-tsze* und Tayen lei schu von *Yih-hing*.

(Von Herrn *Ludwig Matthiessen* in Rostock.)

Im Jahre 1852 veröffentlichte der Engländer und chinesische Journalist *Alexander Wylie* in Shangai einen Aufsatz betitelt: „Jottings on the science of Chinese arithmetic" zuerst im North China Herald, dann 1853 im Shangae Almanac. Nach einer brieflichen Mittheilung des Verfassers vom Jahre 1874 sind die gedachten Artikel in Shangai nicht mehr aufzutreiben. Ein Exemplar scheint durch einen glücklichen Zufall in die Hände des Herrn *K. L. Biernatzki* in Berlin gelangt zu sein, jedoch fehlen leider hierüber genauere Nachrichten. Von jenem Aufsatze veröffentlichte *Biernatzki* nun einen für die Geschichte der Mathematik ausserordentlich interessanten Auszug im 52. Bande dieses Journals (1856) betitelt: „Ueber die Arithmetik der Chinesen", welcher später auch die Aufmerksamkeit ausländischer Mathematiker erregte. Der Aufsatz wurde übersetzt von *Terquem* in den Nouv. ann. math. XXII. 1863 und von *Joseph Bertrand* in dem Journal des Savants 1869. In demselben findet sich eine kurze Mittheilung über die Tayen in dem algebraischen Werke Swan-king von *Sun-tsze* (250 n. Chr.) und seinem Commentator *Tsin-kiu-tschaū* (1210—1290), so wie über die Verallgemeinerung der Tayen im Tayen lei schu des buddhistischen Priesters in China, *Yih-hing* († 717), nebst einer fast vollständigen Uebersetzung des Commentars mit Aufgaben-Sammlung in neun Kapiteln von *Tsin-kiu-tschaū*. Diese Tayen (grosse Erweiterung) ist jedenfalls eine der besten Leistungen der Chinesen auf dem Gebiete der Zahlentheorie. Bis vor Kurzem ist seltsamerweise das eigentliche Wesen der Methode Tayen unverstanden geblieben, wodurch erklärlich wird, dass z. B. *Hankel* in seiner Geschichte der Mathematik des Alterthums die Meinung ausspricht,

dass die Tayen der Chinesen und die Kuttaka der Inder ein und dasselbe seien, sich also auf die Auflösung des Systems unbestimmter Gleichungen

$$N = m_1 x_1 + r_1 = m_2 x_2 + r_2 = m_3 x_3 + r_3 = \cdots$$

beziehen. Dass diese Methoden nun wesentlich von einander verschieden sind, und zwar die Kuttaka d'hyaya des ***Brahmagupta*** (geb. 598) mit der Methode der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Theilers von ***Bachet,*** die Tayen des ***Sun-tsze*** dagegen mit der Congruenzmethode von ***Gauss*** (Disquis. arithm. § 36) identisch sind, ist von mir in mehreren früheren Aufsätzen*) nachgewiesen worden.

Von besonderem Interesse ist aber die verallgemeinerte Tayen-Methode von ***Yih-hing*** und zwar desshalb, weil sie sich in keinem unserer modernen Werke über Zahlentheorie findet. Das Theorem aufzustellen, worauf sich diese Verallgemeinerung gründet, ist der Zweck der folgenden Zeilen. Da sich in die im 52. Bd. S. 77—80 dieses Journals befindlichen Darstellungen der speciellen und der allgemeinen Methode durch ein mangelndes Verständniss der Uebersetzer an gleichen Stellen Irrthümer eingeschlichen haben, so wird es sich empfehlen, dieselben hier zu recapituliren.

Die Regel des ***Sun-tsze*** wird mit vier, durch Reime harmonisch verbundenen Zeilen, welche ihren Inhalt ganz allgemein ausdrücken, eingeleitet und dann sofort in folgende Aufgabe**) eingekleidet: „Eine Zahl, durch 3 dividirt, giebt den Rest 2; durch 5 dividirt, den Rest 3 und durch 7 dividirt, den Rest 2: welches ist die Zahl? Antwort: 23". Das Verfahren, wie diese Aufgabe zu lösen sei, wird durch folgende mystische Worte angedeutet: „Dividirt durch 3, giebt Rest 2: schreibe 140; dividirt durch 5, giebt Rest 3: schreibe 63; dividirt durch 7, giebt Rest 2: schreibe 30; diese Zahlen addirt, giebt 233; davon subtrahirt 210, giebt den Rest 23, die gesuchte Zahl." Dieser abrupten Bemerkung folgt die eben so aphoristische Notiz: „Für 1, durch 3 gewonnen, setze 70; für 1, durch 5 gewonnen, setze 21; für 1, durch 7 gewonnen, schreibe 15; ist die Summe***) 106 oder mehr, so subtrahire davon 105, und der Rest ist die gesuchte Zahl."

---

*) Ueber die Algebra der Chinesen (Schreiben an ***Cantor***), ***Schlömilch,*** Zeitschr. f. Math. u. Phys. XIX. S. 270. 1874. — Vergleichung der indischen Kuttaka und der chinesischen Tayen-Regel (Sitzungsber. der math.-naturw. Section in den Verhandl. der Philologen-Versammlung zu Rostock 1875), Comptes Rendus 1881.

) Dieselbe Aufgabe mit denselben Zahlen findet sich im Swan-fa-tong-tsong von ***Pin-kue* (1590). Vgl. Journ. asiat. (3) VII. 1839.

***) Nämlich die Summe der mit den resp. Resten multiplicirten Hülfszahlen.

In dem Commentar von *Tsin* wird nun die Ta-yen im Anschluss an die zuletzt von *Sun-tsze* gegebene Notiz folgendermassen beschrieben: Man multiplicire die drei Divisoren 3, 5 und 7, wodurch man die Zahl 105 erhält, welche „Stammerweiterung" heisst. Diese dividire man durch die „bestimmte Stammzahl" (Primzahl), hier die Zahl 7, so ist der Quotient die „Erweiterungszahl" 15. Diese dividirt durch 7 lässt 1 als Rest (welches der „Multiplicator" ist)*); mit dem Multiplicator 1 aber vermehrt, giebt sie als Product die „Hülfszahl" 15. Dadurch ist erklärt, warum es bei *Sun-tsze* heisst: Für 1, durch 7 gewonnen, schreibe 15. Auf dieselbe Weise werden die andern Hülfszahlen gesucht, nämlich: 105:5 oder 21 ist die zweite Erweiterungszahl; 21:5 giebt den Rest 1 (welcher der zweite Multiplicator ist)**), und 21×1 oder 21 ist die zweite Hülfszahl. Ebenso $105:3 = 35$, welche Zahl durch 3 dividirt, den (Rest 1 ergiebt, wenn der Multiplicator von 35 gleich 2 genommen wird)***), und die dritte Hülfszahl wird $35 \times 2 = 70$; also: „1 durch 3 gewonnen, schreibe 70". Mit den drei Hülfszahlen wird nun die Rechnung fortgesetzt, indem jene mit den in der ursprünglichen Aufgabe genannten Resten multiplicirt werden, nämlich:

$$70 \times 2 = 140, \quad 21 \times 3 = 63, \quad 15 \times 2 = 30.$$

Hierin finden die oben als mystisch bezeichneten Worte des *Sun-tsze,* welche zur Lösung der Aufgabe Anleitung geben sollten, ihr Verständniss, und es bleibt nun noch übrig, was eben dort verlangt wird, zum Vollzug zu bringen, nämlich:

$$140 + 63 + 30 = 233; \quad 233 - 105 = 128; \quad 128 - 105 = 23,$$

welches die gesuchte Zahl ist.

Um diese Rechnung übersichtlich zu machen, stellen wir die Operationen folgendermassen zusammen:

Bestimmte Primzahlen	Reste	Divisionen	Multiplicatoren	Hülfszahlen
$m_1 = 3$	$r_1 = 2$	$5.7.k_1 \equiv 1 \pmod{3}$	$k_1 = 2$	$5.7.k_1 = 70$
$m_2 = 5$	$r_2 = 3$	$3.7.k_2 \equiv 1 \pmod{5}$	$k_2 = 1$	$3.7.k_2 = 21$
$m_3 = 7$	$r_3 = 2$	$3.5.k_3 \equiv 1 \pmod{7}$	$k_3 = 1$	$3.5.k_3 = 15$

*) An dieser Stelle ist der Text corrumpirt; es muss heissen: wenn der Multiplicator der Erweiterungszahl 15 gleich 1 genommen wird; also $1.15 \equiv 1 \pmod{7}$.

**) Ebenso wie vorhin muss es heissen: wenn der Multiplicator von 21 gleich 1 genommen wird; denn $1.21 \equiv 1 \pmod{5}$.

***) Der Sinn dieser im Text ganz offenbar corrumpirten Stelle, hat so seine richtige Fassung; denn $2.35 \equiv 1 \pmod{3}$.

Die gesuchte Zahl ist

$$N = 2.2.5.7 + 3.1.3.7 + 2.1.3.5 - 3.5.7n = 233 - 105n.$$

Im speciellen Falle, wo $n = 2$ gesetzt wird, erhält man die kleinste Lösung 23. Diese Erweiterungsrechnung oder Ta-yen diente späteren chinesischen Gelehrten zur Berechnung astronomischer Verhältnisse, namentlich der Cykeln und Epicykeln. Spuren davon finden sich bei den Byzantinern*), auch in neuerer Zeit im Occident**), endlich ist sie nacherfunden wie es scheint, und wissenschaftlich dargestellt von *Gauss****). Dieser Zahlentheoretiker stellt dieselbe Methode folgendermassen dar:

Wenn die Moduln der Congruenzen

$$N \equiv r_1 \pmod{m_1},\quad N \equiv r_2 \pmod{m_2},\quad N \equiv r_3 \pmod{m_3},\ \text{etc.}$$

sämmtlich relativ prim sind, so suche man die Zahlen α, β, γ, etc., welche folgenden Congruenzen genügen:

$$\alpha \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{m}{m_1}\right),\quad \alpha \equiv 1 \pmod{m_1},$$

$$\beta \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{m}{m_2}\right),\quad \beta \equiv 1 \pmod{m_2},$$

$$\gamma \equiv 0 \left(\operatorname{mod} \frac{m}{m_3}\right),\quad \gamma \equiv 1 \pmod{m_3},\quad \text{etc.}$$

wo $m_1 m_2 m_3 \ldots = m$ gesetzt ist. Alsdann kann man setzen

$$N \equiv \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 + \cdots \pmod{m}.$$

Diese Auflösung ist vorzuziehen, wenn mehrere Probleme von constanten Moduln vorgelegt sind. In diesem Falle behalten die Hülfszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ immer dieselben Werthe. Man bedient sich dieser Methode in der Chronologie†).

Das Buch von *Yih-hing*, betitelt „Ta-yen lei schu" hat bei den Chinesen eine grosse Berühmtheit gehabt, ist deswegen auch häufig commentirt worden, namentlich durch *Tsin-kiu-Tschaŭ* in einem Werke in zwei Theilen,

---

*) Man vergl. *Nicomachi Geraseni* Pythagorei introductionis arithm. libri duo; rec. *Rich. Hoche*, Leipzig 1866. Anhang: Probl. V. anonymi auctoris.

**) *Schäfer, J. Ch.*, Die Wunder der Rechenkunst. 60. Aufgabe. Weimar 1842.

***) Disquisitiones arithmeticae § 36. — Vorlesungen über Zahlentheorie von *Lejeune-Dirichlet*. Herausgegeben von *Dedekind*. § 25. Braunschweig 1863.

†) Die Quelle, worauf sich *Gauss* zu beziehen scheint, ist leider unbekannt. Bemerkenswerth bleibt, dass *Gauss* ganz dieselben Zahlen wie bei *Sun-tsze* mit dem Namen „Hülfszahlen" bezeichnet.

jeder von neun Kapiteln. Der Inhalt des ersten Theiles, der von *Wylie* fast vollständig mitgetheilt wird, ist kurz folgender:

1. Kap. Von der Berechnung der Hülfszahlen.
2. Kap. Berechnung der drei Cykeln.
3. Kap. Aufgaben aus der Gesellschaftsrechnung.
4. Kap. Aufgaben aus der Geld- und Wechselrechnung.
5. Kap. Aufgaben über Kauf und Verkauf.
6. Kap. Bewegungsaufgaben.
7. Kap. Das Problem der Courriere.
8. Kap. Baurechnung.
9. Kap. Ueber Criminalsachen. (Der Reisdiebstahl.)

Von hervorragendem Interesse ist nun der Inhalt des ersten Kapitels; derselbe besteht nämlich in einer Verallgemeinerung der Methode von *Sun-tsze* für den Fall, dass die Moduln nicht relative Primzahlen sind.

Yih-hing geht aus von den zu Moduln bestimmten vier Hauptzahlen 1, 2, 3, 4 und sucht dazu die Hülfszahlen. Man bilde aus den gegebenen Zahlen die folgenden Producte:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24,$$
$$1 \times 3 \times 4 = 12,$$
$$1 \times 2 \times 4 = 8,$$
$$1 \times 2 \times 3 = 6.$$

Diese Producte werden dann als „Erweiterungszahlen" mit den vier Hauptzahlen in zwei Reihen zusammengestellt:

Hauptzahlen:	1	2	3	4
Erweiterungszahlen:	24	12	8	6.

Die Summe der letzteren giebt die „grosse Erweiterungszahl" 50 und das Product von je zwei unter einander stehenden, einer Haupt- und einer Erweiterungszahl, beträgt jedesmal 24. Diese Erweiterungszahlen eignen sich jedoch nicht zu einer Bestimmung der Hülfszahlen, weil sie den gemeinschaftlichen Factor 2 besitzen. Deshalb werden sie durch diesen gemeinschaftlichen Factor in der Weise verkleinert, dass in zwei neuen Reihen das Product von je einem relativen Primmodul mit der unter ihm stehenden Erweiterungszahl gleich 12 ist, nämlich:

Relative Primzahlen:	1	1	3	4
Erweiterungszahlen:	12	12	4	3.

Nun werden die Erweiterungszahlen durch die darüber stehenden relativen Primzahlen so lange dividirt, bis 1 als Rest bleibt; also

Relative Primzahlen: 1 1 3 4
[Reste]*) Multiplicatoren: 1 1 1 3.

Diese Multiplicatoren werden nun im Fortschritte der Rechnung als Multiplicatoren für die zuvor aufgeführten Erweiterungszahlen 12, 12, 4, 3 gebraucht, woraus, unter Wiederholung der relativen Primmoduln, die Reihen

Relative Primzahlen: 1 1 3 4
Erweiterungs-Hülfszahlen: 12 12 4 9

entstehen.

Da nun die zweite Hauptzahl 2 oben schon auf 1 reducirt und dabei die zweite Erweiterungszahl 12 unverändert beibehalten wurde, so wird zu letzterer noch die zweite Erweiterungs-Hülfszahl addirt, die übrigen dagegen unverändert gelassen; woraus sich mit Zusammenstellung der Hauptzahlen, von denen die Berechnung ausging, folgende zwei Reihen ergeben:

Hauptzahlen: 1 2 3 4
Bestimmte Hülfszahlen: 12 24 4 9.

Es möge zunächst die Anwendung dieser von *Yih-hing* bestimmten Hülfszahlen an einem Beispiele erläutert werden. Das dritte Kapitel handelt von der Berechnung der Arbeit.

Vier Gesellschaften, deren Mitgliederzahl verschieden ist, übernehmen die Aufführung eines Dammes. Jeder Gesellschaft wird ein gleicher Theil der Arbeit überwiesen; wie gross derselbe aber sei, ist unbekannt; man kennt nur die Kräfte, welche jede Gesellschaft verwenden kann, und wie viel von jeder Gesellschaft nach Angabe des letzten ganzen Tagewerkes unausgeführt geblieben ist. Daraus soll gefunden werden, ein wie grosser Theil des Dammes überhaupt vollendet wurde.

Die disponibeln Arbeitskräfte seien 2, 3, 6, 12 und die unvollendet gebliebenen Strecken beziehungsweise 1, 2, 5, 5. Zur Abkürzung der Rechnung stellen wir die Operationen in folgender Uebersicht zusammen:

*) Dieser ganze Passus ist durch das Missverständniss der Uebersetzer ebenso corrumpirt, wie an der gleichen Stelle in der Methode von *Sun-tsze*. Es muss heissen: Man multiplicire jede Erweiterungszahl mit den aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... so lange, bis bei der Division dieser Producte durch die darüber stehende Zahl 1 als Rest bleibt; alsdann werden die betreffenden Multiplicatoren unter die Divisoren gesetzt.

Haupt-zahlen:	Relative Primmoduln	Reste	Divisionen	Multiplicat.	Erweiterungs-Hülfszahlen
$m_1 = 2$	$\mu_1 = 1$	$r_1 = 1$	$1.3.4.k_1 \equiv 1 \pmod 1$	$k_1 = 1$	$\frac{m}{\mu_1} k_1 = 12$
$m_2 = 3$	$\mu_2 = 1$	$r_2 = 2$	$1.3.4.k_2 \equiv 1 \pmod 1$	$k_2 = 1$	$\frac{m}{\mu_2} k_2 = 12$
$m_3 = 6$	$\mu_3 = 3$	$r_3 = 5$	$1.1.4.k_3 \equiv 1 \pmod 3$	$k_3 = 1$	$\frac{m}{\mu_3} k_3 = 4$
$m_4 = 12$	$\mu_4 = 4$	$r_4 = 5$	$1.1.3.k_4 \equiv 1 \pmod 4$	$k_4 = 3$	$\frac{m}{\mu_4} k_4 = 9$

Die Erweiterungs-Hülfszahlen sind demnach dieselben wie vorhin. Da nun weiter

$$m_1-\mu_1 = 1, \quad m_2-\mu_2 = 2, \quad m_3-\mu_3 = 3, \quad m_4-\mu_4 = 8,$$

so findet man daraus allgemeiner folgende bestimmte Hülfszahlen:

$$\frac{m}{\mu_1} k_1(1+m_1-\mu_1) = 24,$$

$$\frac{m}{\mu_2} k_2(1+m_2-\mu_2) = 36,$$

$$\frac{m}{\mu_3} k_3(1+m_3-\mu_3) = 16,$$

$$\frac{m}{\mu_4} k_4(1+m_4-\mu_4) = 81.$$

Die von jeder Gesellschaft zu leistende Arbeit ist demnach

$$N = 1.24+2.36+5.16+5.81-\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 n = 581-12n$$

und die kleinste Lösung $N = 17$. Da ferner

$$17 = 8.2+1 = 5.3+2 = 2.6+5 = 1.12+5$$

ist, so ist die überhaupt vollendete Arbeit $8.2+5.3+2.6+1.12 = 55$.

Nach der im Vorstehenden entwickelten Methode für nicht theilfremde Moduln von dem chinesischen Arithmetiker *Yih-hing* lässt sich demnach das folgende Theorem aufstellen:

Seien $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die beliebigen Moduln des Restproblems

$$N \equiv r_1 \pmod{m_1} \equiv r_2 \pmod{m_2} \equiv r_3 \pmod{m_3} \quad \text{etc.}$$

und ihr kleinster gemeinschaftlicher Dividuus

$$m = 1^p.1^q\ldots 2^r.3^s.5^t\cdots = \mu_1\mu_2\mu_3\ldots,$$

so suche man die Erweiterungs-Hülfszahlen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, welche den folgen-

den Systemen von Congruenzen genügen:

$$m_1 \equiv 0 \pmod{\mu_1},$$
$$m_2 \equiv 0 \pmod{\mu_2},$$
$$m_3 \equiv 0 \pmod{\mu_3} \quad \text{etc.},$$

$$\alpha \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \frac{m}{\mu_1}\right), \qquad \alpha \equiv 1 \pmod{\mu_1}$$
$$\beta \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \frac{m}{\mu_2}\right), \qquad \beta \equiv 1 \pmod{\mu_2}$$
$$\gamma \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\, \frac{m}{\mu_3}\right), \text{ etc.} \quad \gamma \equiv 1 \pmod{\mu_3} \text{ etc.}$$

Alsdann kann man setzen

$$N \equiv \alpha r_1 + \beta r_2 + \gamma r_3 + \cdots \pmod{m},$$

allgemein

$$N = \Sigma \alpha r_1 (1 + m_1 - \mu_1) - m u,$$

wo u eine beliebige ganze Zahl bezeichnet.

Wenn für nicht theilfremde Moduln die Aufgabe möglich sein soll, so ist erforderlich, dass die vorgelegten Congruenzen der allgemeinen Congruenz

$$r_p \equiv r_q (\mathrm{mod}\, \delta(m_p, m_q))$$

genügen, wo δ den grössten gemeinschaftlichen Theiler irgend zweier Moduln m_p und m_q bezeichnet.

Rostock, den 31. December 1880.

Integrale von einigen linearen Differentialgleichungen.

(Von Herrn *Gräfe* in Bern.)

Herr *Simon Spitzer* hat in Bd. 88 p. 343 sq. dieses Journals aus dem allgemeinen Integrale der *Riccati*schen Differentialgleichung

$$(1.)\qquad y'' = x^m y,$$

wenn m ausserhalb der Grenzen 0 und -4 liegt, das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y''-x^m y}{x^{\frac{m}{2}-1}}\right) = 0$$

resp. der Gleichungen:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y''-x^m y}{x^{\frac{m-2}{2}}}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y''-x^m y}{x^{\frac{m}{2}}}\right) = 0$$

abgeleitet. Alle Resultate des Aufsatzes von Herrn *Spitzer* kann man verallgemeinern.

Man erhält als Integral der Gleichung

$$y''-\alpha^2 x^m y = 0$$

die Formel

$$y = b_1\int_{-\alpha}^{+\alpha} f(u)\,du + b_2\int_{-\alpha}^{+\alpha} f_1(u)\,du,$$

wenn ist

$$f(u) = e^{\frac{2ux^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}}(\alpha^2-u^2)^{-\frac{m+4}{2m+4}},$$

$$f_1(u) = x.e^{\frac{2ux^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}}(\alpha^2-u^2)^{-\frac{m}{2m+4}}.$$

Es ist dann

$$y = b_1\int_0^{\alpha} f(u)\,du + b_2\int_0^{-\alpha} f(u)\,du + b_3\int_0^{\alpha} f_1(u)\,du + b_4\int_0^{-\alpha} f_1(u)\,du$$

das allgemeine Integral der Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{y''-\alpha^2 x^m y}{x^{\frac{m-2}{2}}}\right) = 0.$$

Ist hier $b_3+b_4 = 0$, so ist obiger Ausdruck das allgemeine Integral der Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y''-\alpha^2 x^m y}{x^{\frac{m-2}{2}}}\right) = 0,$$

und wird $b_1+b_2 = 0$, so genügt jener Ausdruck der Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y''-\alpha^2 x^m y}{x^{\frac{m}{2}}}\right) = 0.$$

In allen diesen Formeln liegt m ausserhalb der Grenzen 0 und -4.

Für $m = -1$ ist

$$y = b_1 x\int_{-\alpha}^{+\alpha} f_1(u)\,du + b_2\int_{-\alpha}^{+\alpha} f_2(u)\,du$$

das allgemeine Integral der Gleichung

$$4y''-x^{-1} y\,\alpha^2 = 0,$$

wenn ist:

$$f_1(u) = e^{u\sqrt{x}}(u^2-\alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$f_2(u) = f_1(u)\left\{x\log[(u^2-\alpha^2)\sqrt{x}] + \frac{2u\sqrt{x}-1}{u^2-\alpha^2}\right\}.$$

Der Ausdruck

$$y = b_1 x\int_0^{\alpha} f_1(u)\,du + b_2 x\int_0^{-\alpha} f_1(u)\,du + b_3\int_0^{\alpha} f_2(u)\,du + b_4\int_0^{\alpha} f_2(u)\,du$$

stellt das allgemeine Integral der Differentialgleichung:

$$\left\{\frac{4}{\alpha^2}-2x\right\}\sqrt{x}\cdot\frac{d^2}{dx^2}\left\{\left(y''x-\frac{\alpha^2 y}{4}\right)\sqrt{x}\right\} + 2\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\left\{\left(y''x-\frac{\alpha^2 y}{4}\right)\sqrt{x}\right\} = 2\left(y''x-\frac{\alpha^2 y}{4}\right)$$

dar. Ist $b_3+b_4 = 0$, so ist der Ausdruck das allgemeine Integral der Gleichung

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y''x-\frac{\alpha^2}{4}y}{x^{\frac{1}{2}}}\right) = 0.$$

Für $m = -3$ ist schliesslich

$$y = b_1 \int_{-\alpha}^{+\alpha} f_1(u)\, du + b_2 \int_{-\alpha}^{+\alpha} f_2(u)\, du$$

das allgemeine Integral der Gleichung

$$4x^3 y'' - y\alpha^2 = 0,$$

wenn ist

$$f_1(u) = e^{\frac{u}{\sqrt{x}}} (u^2 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$f_2(u) = f_1(u) \left\{ \log \frac{u^2 - \alpha^2}{\sqrt{x}} + \frac{2u\sqrt{x} - x}{u^2 - \alpha} \right\}.$$

Das allgemeine Integral der Differentialgleichung vierter Ordnung

$$(2x - \alpha^2)\, x \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \frac{4x^3 y'' - y\alpha^2}{\sqrt{x}} \right\} - \alpha^2 \frac{d}{dx} \left\{ \frac{4x^3 y'' - y\alpha^2}{\sqrt{x}} \right\} = 0$$

ist

$$y = b_1 \int_0^{\alpha} f_1(u)\, du + b_2 \int_0^{-\alpha} f_1(u)\, du + b_3 \int_0^{\alpha} f_2(u)\, du + b_4 \int_0^{-\alpha} f_2(u)\, du.$$

Alle diese Formeln werden auf dieselbe Art bewahrheitet, wie Herr *Simon Spitzer* für die Specialfälle $\alpha^2 = 1$ resp. $\alpha^2 = 4$ es gethan hat.

Bern, im December 1880.

Ueber den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen von Differentialgleichungen.

(Von Herrn *L. Königsberger* in Wien.)

Der Fundamentalsatz in der Theorie der homogenen linearen Differentialgleichungen liefert das allgemeine Integral derselben als eine additive Verbindung mit willkürlichen Constanten multiplicirter particulärer Integrale, und gerade auf diesem Satze beruht die Möglichkeit der Discussion der Integrale linearer Differentialgleichungen. Eine wichtige und für die Entwickelung der Theorie der allgemeinen Differentialgleichungen unumgängliche Frage ist nun die nach der Beziehung des allgemeinen Integrales zu den particulären für beliebige algebraische Differentialgleichungen oder vielmehr die nach den Bedingungen für die Existenz einer solchen *algebraischen* Relation, eine Frage, deren Beantwortung sich angreifen lässt vermöge derjenigen Untersuchungen und Sätze über Differentialgleichungen, welche ich in der letzten Zeit in meinen Arbeiten über die Erweiterung des *Abel*schen Theorems auf beliebige Differentialgleichungen und über algebraisch-logarithmische Integrale nicht homogener linearer Differentialgleichungen*) veröffentlicht habe.

Es mag noch erwähnt werden, dass den Kernpunkt dieser Ueberlegungen die Frage nach der Anzahl der einer algebraischen Differentialgleichung zugehörigen selbständigen transcendenten Integrale bildet, und dass in die Klasse dieser Untersuchungen auch jene merkwürdigen Sätze von *Poisson* und *Jacobi* gehören, nach welchen man aus zwei Integralen eines mechanischen Problems alle finden kann.

Um zuerst den Zweck und die Bedeutung der nachfolgenden Unter-

---

*) Dieses Journal B. 90 H. 2, 3, 4.

suchungen klar zu machen, wollen wir uns mit linearen Differentialgleichungen erster Ordnung beschäftigen; sind dieselben homogen von der Form

$$\frac{dy}{dx}+yf(x) = 0,$$

so lässt sich, wenn y_1 ein willkürliches particuläres Integral derselben bezeichnet, das allgemeine Integral homogen und linear durch y_1 in der Form $y = cy_1$ ausdrücken, worin c eine willkürliche Constante bezeichnet. Handelt es sich dagegen um die nicht homogene lineare Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}+yf(x) = \varphi(x),$$

deren allgemeines Integral die Form hat

$$y = ce^{-\int f(x)dx}+e^{-\int f(x)dx}\int e^{\int f(x)dx}\varphi(x)\,dx,$$

so wird sich, wenn y_1 das dem speciellen Werthe c_1 entsprechende particuläre Integral bedeutet, die im Allgemeinen transcendente Beziehung

$$y = y_1+(c-c_1)e^{-\int f(x)dx}$$

zwischen dem allgemeinen und einem bestimmten particulären Integrale ergeben. Soll nun aber zwischen y, y_1 und einer willkürlichen Constanten C eine algebraische Beziehung bestehen von der Form

$$y = F(x, y_1, C),$$

so muss die Gleichung stattfinden

$$F(x, y_1, C) = y_1+(c-c_1)e^{-\int f(x)dx},$$

deren Existenzbedingungen zu untersuchen sein werden. Diese Gleichung kann eine in y_1 identische oder eine diese Grösse bestimmende algebraische Gleichung sein; findet Identität in Bezug auf y_1 statt, so folgt, weil y_1 aus der Gleichung herausfällt, also auch gleich Null gesetzt werden kann, und F eine algebraische Function bedeutet, dass $e^{-\int f(x)dx}$ *ebenfalls eine algebraische Function von x ist* — und umgekehrt, wenn $e^{-\int f(x)dx} = \varphi(x)$ eine algebraische Function von x darstellt, wird

$$y = y_1+(c-c_1)\varphi(x)$$

die gesuchte algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale sein. Dieser Fall tritt dann und nur dann ein, wenn $f(x)$ das Differential des Logarithmus einer algebraischen Function von x

ist; so wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x} = 1$$

für das allgemeine transcendente Integral $y = cx + x\log x$ die Beziehung liefern

$$y = y_1 + (c - c_1)x.$$

Ist die obige Gleichung jedoch keine in y_1 identische, so ergiebt sich aus derselben y_1 als algebraische Function von x und $e^{\int f(x)dx}$, wobei wir mit Rücksicht auf den eben behandelten Fall annehmen dürfen, dass diese letztere Exponentialfunction sich nicht algebraisch durch x ausdrücken lässt. Da nun aber y_1 selbst algebraisch durch

$$e^{\int f(x)dx} \quad \text{und} \quad \int e^{\int f(x)dx}\varphi(x)\,dx = z$$

ausdrückbar ist, so würde sich z als algebraische Function von x und $e^{\int f(x)dx}$ ergeben; aus dem Ausdrucke für z folgt aber

$$\frac{dz}{dx} = e^{\int f(x)dx}\varphi(x), \quad \frac{d^2z}{dx^2}\varphi(x) - [f(x)\varphi(x) + \varphi'(x)]\frac{dz}{dx} = 0,$$

d. h. z genügt einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten, da die Ableitung der algebraischen Function $\varphi(x)$ rational durch x und eben diese Function $\varphi(x)$ ausgedrückt werden kann, rational aus x, $f(x)$ und $\varphi(x)$ zusammengesetzt sind. Andererseits aber wird unter der Voraussetzung, dass sich z als algebraische Function von x und $e^{\int f(x)dx}$ in der Form

$$z = \omega(x, e^{\int f(x)dx})$$

ausdrücken lässt, die Elimination von $e^{\int f(x)dx}$ aus dieser Gleichung und der früheren Ableitungsgleichung

$$\frac{dz}{dx} = e^{\int f(x)dx}\varphi(x)$$

eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung für z ergeben:

$$F\left(x, \varphi(x), z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

deren Coefficienten rational aus x und $\varphi(x)$ zusammengesetzt sind. Nach der von mir in meiner Arbeit „allgemeine Bemerkungen zum *Abel*schen Theorem" (dieses Journal B. 90 H. 2) gegebenen Definition der Irreductibilität algebraischer Differentialgleichungen würde dies aussagen, dass die

oben für z aufgestellte Differentialgleichung zweiter Ordnung nicht irreductibel ist; nun ist aber in eben dieser Arbeit der Satz erwiesen, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2z}{dx^2} - f(x,y)\frac{dz}{dx} = 0,$$

in welcher y eine algebraische Function von x bedeutet, irreductibel sei, die ist, dass der Ausdruck

$$\varrho e^{-\int f(x,y)dx} + e^{-\int f(x,y)dx}\int e^{\int f(x,y)dx}dx$$

für kein constantes ϱ eine algebraische Function von x ist; in unserem Falle wäre somit die obige Differentialgleichung zweiter Ordnung für z dann und nur dann reductibel, wenn ein constantes ϱ existirt, für welches, da

$$e^{-\int f(x,y)dx} = e^{-\int\left(f(x)+\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right)dx} = \frac{1}{\varphi(x)}e^{-\int f(x)dx}$$

ist,

$$\varrho e^{-\int f(x)dx} + e^{-\int f(x)dx}\int e^{\int f(x)dx}\varphi(x)\,dx = \psi(x)$$

eine algebraische Function von x wird, d. h. wenn die vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung ein algebraisches Integral besitzt; unter dieser Annahme wird

$$z = \int e^{\int f(x)dx}\varphi(x)\,dx = \psi(x)\,e^{\int f(x)dx} - \varrho,$$

und das allgemeine Integral der Differentialgleichung erster Ordnung geht in

$$y = e^{-\int f(x)dx}(c-\varrho) + \psi(x)$$

über, so dass sich durch Zusammenstellung dieser Gleichung mit

$$y_1 = e^{-\int f(x)dx}(c_1-\varrho) + \psi(x)$$

die gesuchte Beziehung zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale in der Form ergiebt

$$(c_1-\varrho)y - (c-\varrho)y_1 = \psi(x)(c_1-c),$$

somit wiederum wie in dem ersten Falle ein linearer Zusammenhang — vorausgesetzt wird dabei, dass $c_1-\varrho$ von Null verschieden ist, also y_1 nicht etwa das algebraische particuläre Integral der gegebenen Differentialgleichung bedeutet; so wird die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} + y = x,$$

deren allgemeines Integral $y = ce^{-x} + x - 1$ ist, die Beziehung liefern

$$c_1 y - c y_1 = (c_1 - c)(x-1),$$

wenn c_1 von Null verschieden ist.

Wir finden somit, ***dass in einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung erster Ordnung*** $\frac{dy}{dx} + y f(x) = \varphi(x)$ ***dann und nur dann eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen, einem particulären Integrale und der Variabeln*** x ***besteht, wenn entweder*** $e^{\int f(x) dx}$ ***eine algebraische Function von*** x ***ist, oder die Differentialgleichung selbst ein algebraisches particuläres Integral besitzt; in beiden Fällen ist die Beziehung zwischen dem allgemeinen und dem particulären Integrale eine lineare von der Form*** $Ay + A_1 y_1 = \omega(x)$, ***wenn*** $\omega(x)$ ***eine algebraische Function von*** x, A ***und*** A_1 ***Constanten bedeuten, in denen die willkürliche Integrationsconstante enthalten ist.***

Setzt man voraus, die lineare Differentialgleichung erster Ordnung sei irreductibel, so ist der zweite Fall von der Existenz eines algebraischen Integrales ausgeschlossen, und es bleibt nur die Bedingung bestehen, dass $e^{\int f(x) dx}$ eine algebraische Function von x ist.

In der eben durchgeführten Untersuchung ist aus der Entwickelung selbst unmittelbar zu erkennen, dass man in der gefundenen Relation zwischen dem allgemeinen und dem bestimmt gewählten particulären Integrale y_1 ***ohne Aenderung der in der Relation vorkommenden algebraischen Functionen und Constanten*** letzteres durch jedes nicht algebraische particuläre Integral ersetzen kann, stets wird y wieder ein Integral der Differentialgleichung und wegen Vorkommens einer willkürlichen Constanten das allgemeine Integral derselben sein; so wird in der oben gefundenen Beziehung

$$(c_1 - \varrho) y - (c - \varrho) y_1 = (c_1 - c)\, \psi(x),$$

wenn für y_1 ein beliebiges anderes particuläres Integral

$$y_2 = \frac{\varkappa - \varrho}{c_1 - \varrho} y_1 + \frac{c_1 - \varkappa}{c_1 - \varrho} \psi(x)$$

gesetzt wird, für y das Integral

$$Y = \frac{\lambda - \varrho}{c_1 - \varrho} y_1 + \frac{c_1 - \lambda}{c_1 - \varrho} \psi(x)$$

zu setzen sein, worin λ durch die Gleichung bestimmt ist

$$\lambda - \varrho = \frac{(c - \varrho)(\varkappa - \varrho)}{c_1 - \varrho},$$

und es wird Y wieder das allgemeine Integral jener linearen Differentialgleichung erster Ordnung sein.

Dies liess sich a priori vermöge eines Satzes einsehen, der die Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen verschiedener oder derselben Differentialgleichungen für die Substitution beliebiger anderer Integrale derselben nachweist und von mir zuerst für eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung und ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung in der Arbeit „über algebraische Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen" (dieses Journal B. 84) und später in völlig allgemeiner Form in der oben erwähnten Arbeit „allgemeine Bemerkungen zum *Abel*schen Theorem" aufgestellt worden ist; derselbe wird später den Ausgangspunkt für die Behandlung der allgemeinen Frage bilden.

Die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung betreffend mag noch bemerkt werden, dass, wenn die Aufgabe gestellt wird, das allgemeine Integral durch *zwei* particuläre Integrale eben dieser Differentialgleichung auszudrücken, dies ohne jede weitere Bedingung unmittelbar geschehen kann, da, wenn

$$e^{-\int f(x)dx} = i, \quad e^{-\int f(x)dx}\int e^{\int f(x)dx}\varphi(x)\,dx = i_1$$

gesetzt wird, die drei Gleichungen

$$y = ci + i_1, \quad y_1 = c_1 i + i_1, \quad y_2 = c_2 i + i_1$$

die homogene lineare Relation liefern

$$y = c\frac{y_1 - y_2}{c_1 - c_2} + \frac{c_1 y_2 - c_2 y_1}{c_1 - c_2}.$$

Diese für lineare Differentialgleichungen erster Ordnung angestellten Betrachtungen werden sich auf solche m^{ter} Ordnung erweitern lassen, worauf wir jedoch nur in Kürze eingehen wollen, da die Untersuchung dieser Frage für nichtlineare Differentialgleichungen wesentlich andere Methoden erfordern wird. Sei die vorgelegte Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + f_m(x)y = \varphi(x),$$

in welcher $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... $f_m(x)$, $\varphi(x)$ algebraische Functionen von x bedeuten sollen, und werde die Frage aufgeworfen, unter welchen Bedingungen sich das allgemeine Integral als algebraische Function von x, von m particulären Integralen derselben Differentialgleichung und m willkürlichen Constanten darstellen lässt. Wenn η_1, η_2, ... η_m m particuläre Funda-

mentalintegrale der reducirten Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m}+f_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\cdots+f_m(x)y = 0$$

darstellen, und man bestimmt aus dem Systeme von Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\eta_1\frac{dc_1}{dx}+\eta_2\frac{dc_2}{dx}+\cdots+\eta_m\frac{dc_m}{dx} = 0,\\
&\frac{d\eta_1}{dx}\frac{dc_1}{dx}+\frac{d\eta_2}{dx}\frac{dc_2}{dx}+\cdots+\frac{d\eta_m}{dx}\frac{dc_m}{dx} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}}\frac{dc_1}{dx}+\frac{d^{m-1}\eta_2}{dx^{m-1}}\frac{dc_2}{dx}+\cdots+\frac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}}\frac{dc_m}{dx} = \varphi(x)
\end{aligned}$$

die Werthe von $c_1, c_2, \dots c_m$, welche, wenn die Determinanten

$$\begin{vmatrix}
\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_m\\
\frac{d\eta_1}{dx} & \frac{d\eta_2}{dx} & \cdots & \frac{d\eta_m}{dx}\\
\vdots & & & \\
\frac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}\eta_2}{dx^{m-1}} & \cdots & \frac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}}
\end{vmatrix} = \Delta,$$

$$(-1)^{m-r}\begin{vmatrix}
\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_{r-1} & \eta_{r+1} & \cdots & \eta_m\\
\frac{d\eta_1}{dx} & \frac{d\eta_2}{dx} & \cdots & \frac{d\eta_{r-1}}{dx} & \frac{d\eta_{r+1}}{dx} & \cdots & \frac{d\eta_m}{dx}\\
\vdots & & & & & & \\
\frac{d^{m-2}\eta_1}{dx^{m-2}} & & \cdots & \frac{d^{m-2}\eta_{r-1}}{dx^{m-2}} & \frac{d^{m-2}\eta_{r+1}}{dx^{m-2}} & \cdots & \frac{d^{m-2}\eta_m}{dx^{m-2}}
\end{vmatrix} = \Delta_r$$

gesetzt werden, in der Form erhalten werden

$$c_1 = \int\frac{\Delta_1}{\Delta}\varphi(x)dx+C_1, \quad \dots \quad c_m = \int\frac{\Delta_m}{\Delta}\varphi(x)dx+C_m,$$

worin $C_1, C_2, \dots C_m$ willkürliche Constanten bedeuten, so hat das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung die Gestalt

$$\begin{aligned}
y &= C_1\eta_1+C_2\eta_2+\cdots+C_m\eta_m\\
&+\eta_1\int\frac{\Delta_1}{\Delta}\varphi(x)dx+\eta_2\int\frac{\Delta_2}{\Delta}\varphi(x)dx+\cdots+\eta_m\int\frac{\Delta_m}{\Delta}\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Bezeichnet man die zu m particulären Integralen $y_1, y_2, \dots y_m$ gehörigen Constantensysteme mit

$$\begin{matrix}
C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{m1}\\
\vdots & & & \\
C_{1m} & C_{2m} & \cdots & C_{mm},
\end{matrix}$$

so folgen die Beziehungen

$$y - y_1 = (C_1 - C_{11})\eta_1 + (C_2 - C_{21})\eta_2 + \cdots + (C_m - C_{m1})\eta_m,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y - y_m = (C_1 - C_{1m})\eta_1 + (C_2 - C_{2m})\eta_2 + \cdots + (C_m - C_{mm})\eta_m.$$

Soll nun zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen der nicht reducirten Differentialgleichung und m willkürlichen Constanten eine algebraische Beziehung von der Form

$$y = F(x, y_1, y_2, \ldots y_m, \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m)$$

stattfinden, so müssen die m Gleichungen befriedigt werden

$$F(x, y_1, y_2, \ldots y_m, \varkappa_1, \ldots \varkappa_m) - y_r$$
$$= (C_1 - C_{1r})\eta_1 + (C_2 - C_{2r})\eta_2 + \cdots + (C_m - C_{mr})\eta_m;$$

diese Gleichungen können nun identisch für alle $y_1, y_2, \ldots y_m$ oder nur für einige derselben bestehen, oder es werden sich $y_1, y_2, \ldots y_m$ algebraisch durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ ausdrücken. Man sieht unmittelbar, dass nur eine dieser Gleichungen identisch befriedigt werden kann, und dass somit dann y nur durch *ein* particuläres Integral algebraisch ausdrückbar ist, und zwar ist dann, wenn die r^{te} Gleichung identisch ist,

$$(C_1 - C_{1r})\eta_1 + \cdots + (C_m - C_{mr})\eta_m = \varphi_r(x)$$

eine algebraische Function von x, und die algebraische Beziehung zwischen den Integralen lautet

$$y = y_r + \varphi_r(x).$$

Bemerkt man aber, dass die lineare Beziehung zwischen den η-Grössen für willkürliche Werthe von $C_1, C_2, \ldots C_m$ bestehen muss, wobei diese Grössen auch in der rechten Seite in den von ihnen abhängigen $\varkappa$-Grössen enthalten sind, so folgt daraus, dass jede der η-Grössen eine algebraische Function sein muss und der Fall der identischen Erfüllung einer oder mehrerer der Gleichungen in $y_1, y_2, \ldots y_m$ fällt somit mit dem Falle zusammen, in welchem alle Fundamentalintegrale der reducirten linearen Differentialgleichung algebraisch sind; man erhält in diesem Falle das allgemeine Integral als lineare Function eines particulären Integrales und einer algebraischen Function von x von der obigen Form. Sind die η-Grössen nicht einzeln algebraisch, sondern — und dies ist die Verallgemeinerung der für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung geltenden Sätze — bestehen zwischen denselben eine oder mehrere algebraische Beziehungen,

so mag die zwischen der kleinsten Anzahl der η bestehende algebraische Relation

$$\Phi(x, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_\mu) = 0$$

lauten, es wird dann, da die η-Grössen als lineare Function von

$$y-y_1, \quad y-y_2, \quad \dots \quad y-y_m$$

mit constanten Coefficienten ausdrückbar sind, die zwischen dem allgemeinen und den particulären Integralen lautende algebraische Beziehung die Form haben

$$\Phi(x, A_{11}(y-y_1)+A_{12}(y-y_2)+\dots+A_{1m}(y-y_m), \dots$$
$$A_{\mu 1}(y-y_1)+A_{\mu 2}(y-y_2)+\dots+A_{\mu m}(y-y_m)) = 0,$$

in welcher die A-Grössen Constanten bedeuten. So wird z. B. für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y = f(x),$$

da zwei particuläre Integrale der reducirten Differentialgleichung in der Beziehung $\eta_2 = \eta_1^2$ stehen, zwischen dem allgemeinen und zwei particulären Integralen die Relation bestehen

$$K_1(y-y_1)+K_2(y-y_2) = [L_1(y-y_1)+L_2(y-y_2)]^2,$$

worin K_1, K_2, L_1, L_2 Constanten bedeuten.

Ist nun keine der oben behandelten Gleichungen in $y_1, y_2, \dots y_m$ identisch, so werden aus jenen m Gleichungen $y_1, y_2, \dots y_m$ als algebraische Functionen von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ folgen; da aber

$$y_r = C_{1r}\eta_1+C_{2r}\eta_2+\dots+C_{mr}\eta_m+\eta_1\int\frac{\varDelta_1}{\varDelta}\varphi(x)\,dx+\dots+\eta_m\int\frac{\varDelta_m}{\varDelta}\varphi(x)\,dx$$

ist, so ergiebt sich für die Summe der mit η multiplicirten Integrale:

$$\eta_1\int\frac{\varDelta_1}{\varDelta}\varphi(x)\,dx+\eta_2\int\frac{\varDelta_2}{\varDelta}\varphi(x)\,dx+\dots+\eta_m\int\frac{\varDelta_m}{\varDelta}\varphi(x)\,dx$$

eine algebraische Function von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$, und umgekehrt sieht man sogleich, dass, wenn diese Summe eine algebraische Function der η ist, aus den Gleichungen, welche $y, y_1, y_2, \dots y_m$ durch die η und eben diese Integrale ausdrücken, durch Elimination der η-Grössen eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und m particulären Integralen sich ergiebt. Man erkennt unmittelbar, dass, wenn die nicht reducirte lineare Differentialgleichung ein algebraisches particuläres Integral besitzt, aus der oben für y_r aufgeschriebenen Gleichung sich die Summe der mit den η-Grössen

multiplicirten Integrale als algebraische lineare Function von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ ergiebt und somit die Existenz einer algebraischen Beziehung zwischen dem allgemeinen und m particulären Integralen nach sich zieht. Setzen wir zum Zwecke der allgemeinen Untersuchung

$$\int \frac{\varDelta_r}{\varDelta}\varphi(x)\,dx = J_r$$

und sei

$$z = \Phi(x, \eta_1, \eta_2, \dots \eta_m)$$

die algebraische Function der η-Grössen, welche die Summe der mit den η multiplicirten Integrale J darstellen soll, so ergeben sich, da, wie leicht zu sehen, für $\varrho < m-1$

$$\frac{d^\varrho \eta_1}{dx^\varrho}\varDelta_1 + \frac{d^\varrho \eta_2}{dx^\varrho}\varDelta_2 + \dots + \frac{d^\varrho \eta_m}{dx^\varrho}\varDelta_m = 0$$

ist, die folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{l} \eta_1 J_1 + \eta_2 J_2 + \dots + \eta_m J_m = z, \\ \frac{d\eta_1}{dx}J_1 + \frac{d\eta_2}{dx}J_2 + \dots + \frac{d\eta_m}{dx}J_m = \frac{dz}{dx}, \\ \frac{d^2\eta_1}{dx^2}J_1 + \frac{d^2\eta_2}{dx^2}J_2 + \dots + \frac{d^2\eta_m}{dx^2}J_m = \frac{d^2z}{dx^2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}}J_1 + \frac{d^{m-1}\eta_2}{dx^{m-1}}J_2 + \dots + \frac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}}J_m = \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} \end{array}$$

und hieraus

$$J_r = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_{r-1} & z & \eta_{r+1} & \dots & \eta_m \\ \frac{d\eta_1}{dx} & \frac{d\eta_2}{dx} & \dots & \frac{d\eta_{r-1}}{dx} & \frac{dz}{dx} & \frac{d\eta_{r+1}}{dx} & \dots & \frac{d\eta_m}{dx} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}\eta_2}{dx^{m-1}} & \dots & \frac{d^{m-1}\eta_{r-1}}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-1}\eta_{r+1}}{dx^{m-1}} & \dots & \frac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}} \end{vmatrix} : \varDelta,$$

somit J_r als algebraische Function von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ und den $m-1$ ersten Ableitungen derselben ausdrückbar; um die Differentialgleichung zu erhalten, welcher hiernach J_r genügt, wird man eben diese Gleichung

$$J_r = \psi_r\left(\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m, \frac{d\eta_1}{dx}, \dots \frac{d\eta_m}{dx}, \dots \frac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}}, \dots \frac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}}\right)$$

so wie jede der Differentialgleichungen

$$\frac{d^m\eta_s}{dx^m} + f_1(x)\frac{d^{m-1}\eta_s}{dx^{m-1}} + \dots + f_m(x)\eta_s = 0$$

m^2 mal differentiiren und so $(m+1)(m^2+1)$ Gleichungen erhalten, aus denen

die $m(m^2+m+1)$ Grössen

$$\frac{d^{m^2+m}\eta_s}{dx^{m^2+m}}, \quad \frac{d^{m^2+m-1}\eta_s}{dx^{m^2+m-1}}, \quad \ldots \quad \frac{d\eta_s}{dx}, \quad \eta_s$$

eliminirt werden können und somit für J_r die Differentialgleichung folgt

$$F\left(x,\, J_r,\, \frac{dJ_r}{dx}, \ldots \frac{d^{m^2}J_r}{dx^{m^2}}\right) = 0.$$

Andererseits folgt wiederum durch Zusammenstellung der Beziehung

$$\frac{dJ_r}{dx} = \frac{\Delta_r}{\Delta}\varphi(x)$$

mit den Differentialgleichungen für die η-Functionen mit Hülfe von m^2-maliger Differentiation aller dieser Gleichungen, dass durch Elimination der $m(m^2+m+1)$ Differentialquotienten der η aus den $(m+1)(m^2+1)$ Gleichungen sich für J_r eine Differentialgleichung von der Form ergiebt

$$F_1\left(x,\, \frac{dJ_r}{dx}, \ldots \frac{d^{m^2+1}J_r}{dx^{m^2+1}}\right) = 0;$$

da nun J_r den beiden Differentialgleichungen $(m^2+1)^{\text{ter}}$ und $m^{2\text{ter}}$ Ordnung genügen soll, so folgt — genau wie es bei den linearen Differentialgleichungen erster Ordnung sich ergeben — dass die letztere Differentialgleichung reductibel sein muss, und dasselbe gilt für alle m Integrale J_1, $J_2, \ldots J_m$, und umgekehrt, ist die letztere Gleichung reductibel, genügt also J_r einer Differentialgleichung von der Form

$$F\left(x,\, J_r,\, \frac{dJ_r}{dx}, \ldots \frac{d^{m^2}J_r}{dx^{m^2}}\right) = 0,$$

so wird, da

$$\frac{dJ_r}{dx} = \frac{\Delta_r}{\Delta}\varphi(x), \quad \frac{d^2J_r}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta_r}{\Delta}\varphi(x)\right), \quad \ldots$$

ist, also alle Differentialquotienten algebraische Functionen von $x, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ und deren Differentialquotienten sind, auch J_r eine eben solche Function sein; bildet man nunmehr die Ableitungen der so gefundenen Gleichung mit Berücksichtigung der Integraldefinition von J_r $m(m-1)$ mal nacheinander und eliminirt mit Benutzung der reducirten Differentialgleichung zwischen den so sich ergebenden $m(m-1)+1$ Gleichungen die $m(m-1)$ Differentialquotienten

$$\frac{d\eta_s}{dx}, \quad \frac{d^2\eta_s}{dx^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{m-1}\eta_s}{dx^{m-1}},$$

so ergiebt sich eine Gleichung zwischen J_r und den Grössen $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$,

d. h. J_r als algebraische Function von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$. Mit Hülfe der Gleichung

$$y = C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + \dots + C_m\eta_m + \eta_1 J_1 + \eta_2 J_2 + \dots + \eta_m J_m$$

und den entsprechenden Gleichungen für m particuläre Integrale folgt durch Elimination von $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_m$ die gesuchte algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und m particulären Integralen der gegebenen nicht homogenen linearen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung.

Man kann das oben auf eine Irreductibilitätsuntersuchung einer Differentialgleichung $m^{2\text{ter}}$ Ordnung reducirte Problem jedoch auch direct angreifen, indem man die Frage aufwirft, wann das Integral einer algebraischen Function von particulären Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung und den Differentialquotienten derselben wieder als eine algebraische Function derjenigen Grössen ausdrückbar ist, welche unter dem Integral vorkommen. Zur Behandlung dieses Problems reicht jedoch der oben angeführte Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen verschiedener Differentialgleichungen nicht aus, derselbe muss vielmehr durch eine Erweiterung desselben, welche auch das Hinzutreten der Differentialquotienten jener Integrale zulässig macht und welche in der That auch in voller Allgemeinheit gültig ist, ersetzt werden; es wird dieser Satz an anderer Stelle von mir bewiesen werden.

Sei nun allgemein die algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$(1.) \qquad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0$$

vorgelegt, und werde angenommen, dass sich das allgemeine Integral derselben als algebraische Function der Variabeln x, von μ particulären Integralen derselben $y_1, y_2, \dots y_\mu$, welche speciellen Werthen der m Integrationsconstanten zugehören, und den m willkürlichen Constanten $c_1, c_2, \dots c_m$ in der Form ausdrücken lässt

$$(2.) \qquad y = F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, c_1, c_2, \dots c_m).$$

Setzen wir nunmehr voraus, dass *die Differentialgleichung* (1.) *in dem a. a. O. definirten Sinne irreductibel sei*, so lautet der auf S. 128 meiner Arbeit „allgemeine Bemerkungen zum *Abel*schen Theorem" bewiesene Satz für den vorliegenden Zweck specialisirt, folgendermassen: *besteht zwischen* $\mu+1$ *Integralen der Differentialgleichung* (1.) *eine algebraische Beziehung* (2.), *in welche auch die Variable x und die in der Differentialgleichung etwa vor-*

kommenden algebraischen Irrationalitäten eintreten dürfen, so wird diese algebraische Beziehung erhalten bleiben, wenn man statt eines der Integrale ein beliebiges anderes particuläres Integral, für die μ übrigen Integrale aber bestimmte andere particuläre Integrale jener Differentialgleichung substituirt.

Setzt man somit in Gleichung (2.) statt y_1 ein willkürliches anderes particuläres Integral Y_1, so wird man mit *Beibehaltung der willkürlichen Constanten* $c_1, c_2, \dots c_m$ nur für die Integrale $y_2, y_3, \dots y_\mu$ und y andere Integrale $Y_2, Y_3, \dots Y_\mu$ und Y eben dieser Differentialgleichung zu substituiren haben, so dass zugleich mit (2.) die algebraische Beziehung besteht

$$(3.)\qquad Y = F(x, Y_1, Y_2, \dots Y_\mu, c_1, c_2, \dots c_m),$$

und vorausgesetzt, dass durch Substitution der Integrale $Y_2, Y_3, \dots Y_\mu$ nicht eine der willkürlichen Constanten herausfällt, wird Y, da es ebenfalls ein Integral der vorgelegten Differentialgleichung war, auch wieder das allgemeine Integral derselben sein; man erhält somit unter der gemachten Voraussetzung den folgenden Satz:

Lässt sich in einer algebraischen irreductibeln Differentialgleichung m^{ter} Ordnung das allgemeine Integral als algebraische Function der unabhängigen Variabeln x, von μ particulären Integralen und m willkürlichen Constanten ausdrücken, so erhält man immer wieder einen Ausdruck für das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man für eines jener particulären Integrale ein beliebiges anderes, für die $\mu-1$ übrigen aber bestimmte andere particuläre Integrale eben dieser Differentialgleichung substituirt.

Setzt man voraus, dass der algebraische Ausdruck nur *ein* particuläres Integral enthält, so fällt die oben erwähnte Beschränkung dieses Satzes für die Substitution eines anderen, speciellen Werthen der Integrationsconstanten entsprechenden particulären Integrales von selbst weg — wie z. B. bei der Differentialgleichung erster Ordnung, und es ergiebt sich der Satz:

Lässt sich in einer algebraischen irreductibeln Differentialgleichung m^{ter} Ordnung das allgemeine Integral als algebraische Function der unabhängigen Variabeln x, e i n e s particulären Integrales und m willkürlicher Constanten ausdrücken, so erhält man wieder einen Ausdruck für das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung, wenn man für das particuläre Integral ein beliebiges anderes eben dieser Differentialgleichung substituirt.

Nachdem diese Bemerkungen vorausgeschickt worden, wollen wir

das Problem der nachfolgenden Untersuchungen zuerst in seiner ganzen Allgemeinheit folgendermassen hinstellen:

Es sollen alle algebraischen Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung charakterisirt werden, welche die Eigenschaft haben, dass sich ihr allgemeines Integral als algebraische Function der unabhängigen Variabeln, einer bestimmten Anzahl particulärer Integrale und m willkürlicher Constanten ausdrücken lasse, und es soll die Form dieser algebraischen Function selbst ermittelt werden.

Sei wieder (1.) die vorgelegte Differentialgleichung und (2.) die gesuchte algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und μ particulären Integralen, so wird man nach dem oben angeführten Satze von der Erhaltung der algebraischen Relation das Integral y durch irgend eines der Integrale $y_1, y_2, \dots y_\mu$ ersetzen können, wenn man nur für $y_1, y_2, \dots y_\mu$ passende andere Integrale derselben Differentialgleichung

$$Y_{11}, Y_{12}, \dots Y_{1m}; \quad Y_{21}, Y_{22}, \dots Y_{2m}; \quad \dots \quad Y_{\mu 1}, Y_{\mu 2}, \dots Y_{\mu m}$$

substituirt, und es werden sich somit die Beziehungen ergeben:

$$(4.)\quad \begin{cases} y_1 = F(x, Y_{11}, Y_{12}, \dots Y_{1\mu}, c_1, c_2, \dots c_m), \\ y_2 = F(x, Y_{21}, Y_{22}, \dots Y_{2\mu}, c_1, c_2, \dots c_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_\mu = F(x, Y_{\mu 1}, Y_{\mu 2}, \dots Y_{\mu\mu}, c_1, c_2, \dots c_m). \end{cases}$$

Da aber die Integrale Y auch durch die Gleichung (2.) für bestimmte Werthe der c müssen dargestellt werden können, und zwar in der Form

$$(5.)\quad \begin{cases} Y_{\alpha 1} = F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, \varkappa_{11}^{(\alpha)}, \varkappa_{12}^{(\alpha)}, \dots \varkappa_{1m}^{(\alpha)}), \quad \dots \\ Y_{\alpha\mu} = F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, \varkappa_{\mu 1}^{(\alpha)}, \varkappa_{\mu 2}^{(\alpha)}, \dots \varkappa_{\mu\mu}^{(\alpha)}), \end{cases}$$

worin die Constanten $\varkappa$ als Functionen der völlig willkürlichen Grössen c_1, c_2, c_m zu betrachten sind, so erhalten wir unter der gemachten Voraussetzung der Existenz jener algebraischen Beziehung die nachfolgenden Gleichungen:

$$(6.)\quad \begin{cases} y_1 = F\{x, F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, \varkappa_{11}^{(1)}, \dots \varkappa_{1m}^{(1)}), \quad \dots \\ \qquad\qquad F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, \varkappa_{\mu 1}^{(1)}, \dots \varkappa_{\mu m}^{(1)}), c_1, c_2, \dots c_m\}, \\ y_2 = F\{x, F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, \varkappa_{11}^{(2)}, \dots \varkappa_{1m}^{(2)}), \quad \dots \\ \qquad\qquad F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, \varkappa_{\mu 1}^{(2)}, \dots \varkappa_{\mu m}^{(2)}), c_1, c_2, \dots c_m\}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_\mu = F\{x, F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, \varkappa_{11}^{(\mu)}, \dots \varkappa_{1m}^{(\mu)}), \quad \dots \\ \qquad\qquad F(x, y_1, y_2, \dots y_\mu, \varkappa_{\mu 1}^{(\mu)}, \dots \varkappa_{\mu m}^{(\mu)}), c_1, c_2, \dots c_m\}. \end{cases}$$

Da nun angenommen werden darf, dass nicht schon zwischen den μ particulären Integralen $y_1, y_2, \dots y_\mu$ algebraische Beziehungen stattfinden, weil man sonst vermöge dieser Relationen eine oder mehrere dieser Grössen aus der Beziehung (2.) eliminiren könnte, andererseits, wenn nur *ein* particuläres Integral in der algebraischen Beziehung vorkäme, die entsprechende Gleichung die Form haben würde

$$y_1 = F\{x, F(x, y_1, \varkappa_1, \varkappa_2, \dots \varkappa_m), c_1, c_2, \dots c_m\}$$

und wegen der angenommenen Irreductibilität der Differentialgleichung y_1 sich nicht als algebraische Function von x ergeben darf*), während ein constanter Werth von y_1 auch das allgemeine Integral constant machen würde, so *müssen die Gleichungen* (6.) *in den Grössen* $y_1, y_2, \dots y_\mu$ *identisch sein mit Beibehaltung willkürlicher Werthe von* $c_1, c_2, \dots c_m$ *und der davon abhängigen* $\varkappa$*-Grössen.*

Ich beabsichtige nun in der vorliegenden Arbeit die Anwendung dieser allgemeinen Principien auf die Discussion der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung zu geben, und will schon hierbei die verschiedenen Methoden benutzen, wie sie für die Differentialgleichungen höherer Ordnung zur Verwendung kommen.

Wir stellen zuerst die Frage, ob algebraische irreductible Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form

$$(7.)\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^\varkappa + F_1(x, y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^{\varkappa-1} + \dots + F_{\varkappa-1}(x, y)\frac{dy}{dx} + F_\varkappa(x, y) = 0,$$

worin $F_\alpha(x, y)$ eine rationale Function von x und y bedeutet, oder

$$(8.)\quad \frac{dy}{dx} + f(x, y) = 0,$$

worin $f(x, y)$ eine algebraische Function von x und y vorstellt, existiren, für welche das allgemeine Integral eine *ganze* Function eines particulären Integrales ist von der Gestalt

$$(9.)\quad y = \varphi_0(x, c)y_1^m + \varphi_1(x, c)y_1^{m-1} + \dots + \varphi_m(x, c) = F(x, y_1, c),$$

worin c eine willkürliche Constante und $\varphi_\alpha(x, c)$ rationale Functionen von x bedeuten. Nach den Gleichungen (4.) müsste dann die in y_1 identische Gleichung bestehen

---

*) Es genügt statt der Irreductibilität der Differentialgleichung nur vorauszusetzen, dass y_1 nicht ein etwa existirendes algebraisches Integral der gegebenen Differentialgleichung sei.

$$(10.)\qquad y_1 = F\{x, F(x, y_1, \varkappa), c\}$$

oder

$$y_1 = \varphi_0(x, c)\{\varphi_0(x, \varkappa)y_1^m + \cdots + \varphi_m(x, \varkappa)\}^m$$
$$+\varphi_1(x, c)\{\varphi_0(x, \varkappa)y_1^m + \cdots + \varphi_m(x, \varkappa)\}^{m-1} + \cdots + \varphi_m(x, c)$$

und somit, wenn $m > 1$ ist,

$$\varphi_0(x, c)\varphi_0(x, \varkappa)^m = 0;$$

da aber $\varphi_0(x, c)$ für ein willkürliches c nicht verschwinden kann, weil sonst y nur vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade wäre, andererseits aber auch $\varphi_0(x, \varkappa)$ nicht Null sein kann, da $\varkappa$ als Function von c ebenfalls eine willkürliche Grösse ist, so muss $m = 1$ sein, *und es giebt somit keine anderen algebraischen Differentialgleichungen, für welche das allgemeine Integral eine ganze Function eines nicht algebraischen particulären Integrales ist, deren Coefficienten von einer willkürlichen Constanten und der Variabeln algebraisch abhängen als solche, für welche diese Relation eine ganze lineare ist.*

Wollte man nun die Frage der linearen Relation zwischen dem allgemeinen und *einem* particulären Integrale nicht nur speciell für Differentialgleichungen erster Ordnung sondern nach einer Methode, wie sie für beliebige Differentialgleichungen Anwendung finden kann, erörtern, so würde man von der Beziehung ausgehend

$$(11.)\qquad y = Cy_1 + C_1,$$

in welcher C und C_1 algebraische Functionen von x und der willkürlichen Constanten bedeuten, aus der Functionalgleichung (11.)

$$y_1 = C(Ky_1 + K_1) + C_1,$$

in welcher K und K_1 sich von C und C_1 nur durch Substitution der $\varkappa$ statt der c unterscheiden, vermöge der Irreductibilität der Differentialgleichung die beiden Beziehungen herleiten können

$$K.C = 1, \quad K_1 C + C_1 = 0,$$

und somit, wenn man aus den algebraischen Gleichungen für C und C_1 eines der c eliminirt und

$$C_1 = \varphi(C), \quad \text{also} \quad K_1 = \varphi(K) = \varphi\left(\frac{1}{C}\right)$$

setzt, zur Bestimmung der Function φ, welche ausserdem die Variable x algebraisch enthält, die Functionalgleichung finden

$$(12.)\qquad C\varphi\left(\frac{1}{C}\right) + \varphi(C) = 0;$$

worin C, da es von den c abhängt, als willkürliche Grösse betrachtet werden darf. Es ist leicht zu sehen, dass die allgemeinste algebraische Function $\varphi(C)$, welche dieser Functionalgleichung genügt, durch die Gleichung definirt ist:

$$z^m + f_1(C)z^{m-1} + f_2(C)z^{m-2} + \cdots + f_m(C) = 0,$$

worin $f_r(C)$ rationale Functionen von C bedeuten, welche der Functionalgleichung genügen

$$(13.)\qquad C^r f_r\left(\frac{1}{C}\right) = (-1)^r f_r(C);$$

und da alle rationalen Lösungen der Gleichung (13.) offenbar in der Form enthalten sind

$$f_r(C) = A.C^{\frac{r-t}{2}-\nu+\nu_1}(C-1)^t \cdot \frac{(C-a_1)\left(C-\frac{1}{a_1}\right)\cdots(C-a_\nu)\left(C-\frac{1}{a_\nu}\right)}{(C-\alpha_1)\left(C-\frac{1}{\alpha_1}\right)\cdots(C-\alpha_{\nu_1})\left(C-\frac{1}{\alpha_{\nu_1}}\right)},$$

worin r und t zugleich gerade und ungerade sein müssen, während A eine willkürliche algebraische Function von x bedeutet, so wäre die nothwendige Form der linearen Beziehung in der Gestalt gefunden

$$y = Cy_1 + \varphi(C);$$

es müsste nunmehr untersucht werden, ob dazugehörige Differentialgleichungen existiren. Wir wollen jedoch die Frage hier direct für Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form (8.) angreifen und die Form der Function f zu bestimmen suchen, für welche zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale die Beziehung (11.) stattfindet. Da nun

$$\frac{dy}{dx} = C\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dC}{dx} + \frac{dC_1}{dx}$$

ist, so werden zu gleicher Zeit die beiden Gleichungen statthaben müssen

$$\frac{dy_1}{dx} + f(x, y_1) = 0 \quad \text{und} \quad C\frac{dy_1}{dx} + y_1\frac{dC}{dx} + \frac{dC_1}{dx} + f(x, Cy_1 + C_1) = 0$$

oder

$$(14.)\qquad f(x, Cy_1 + C_1) = Cf(x, y_1) - y_1\frac{dC}{dx} - \frac{dC_1}{dx};$$

nehmen wir nun an, die gegebene Differentialgleichung erster Ordnung sei irreductibel oder auch nur, y_1 sei kein algebraisches particuläres Integral, so muss die Gleichung (14.) eine in y_1 und für alle c identische sein und man wird daher dieselbe nach y_1 und c differentiiren dürfen; es folgt

$$C\frac{\partial f(x, Cy_1+C_1)}{\partial(Cy_1+C_1)} = C\frac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1}-\frac{\partial C}{\partial x},$$

$$\left(y_1\frac{\partial C}{\partial c}+\frac{\partial C_1}{\partial c}\right)\frac{\partial f(x, Cy_1+C_1)}{\partial(Cy_1+C_1)} = \frac{\partial C}{\partial c}f(x,\ y_1)-y_1\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial c}-\frac{\partial^2 C_1}{\partial x\partial c},$$

und somit durch Elimination

$$\frac{\partial f(x,y_1)}{\partial y_1}-f(x,\ y_1)\frac{\frac{\partial C}{\partial c}}{y_1\frac{\partial C}{\partial c}+\frac{\partial C_1}{\partial c}} = \frac{y_1\left[\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial c}-C\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial c}\right]+\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial c}-C\frac{\partial^2 C_1}{\partial x\partial c}}{C\left(y_1\frac{\partial C}{\partial c}+\frac{\partial C_1}{\partial c}\right)}.$$

Betrachtet man diese Gleichung als eine Differentialgleichung erster Ordnung mit der unabhängigen Variabeln y_1 und der abhängigen $f(x, y_1)$, so wird durch Integration, da

$$e^{\int\frac{\frac{\partial C}{\partial c}dy_1}{y_1\frac{\partial C}{\partial c}+\frac{\partial C_1}{\partial c}}} = y_1\frac{\partial C}{\partial c}+\frac{\partial C_1}{\partial c}$$

ist,

$$f(x,y_1) = A_1\left(y_1\frac{\partial C}{\partial c}+\frac{\partial C_1}{\partial c}\right)$$

$$+\frac{y_1\frac{\partial C}{\partial c}+\frac{\partial C_1}{\partial c}}{C}\int\frac{y_1\left[\frac{\partial C}{\partial x}\frac{dC}{dc}-C\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial c}\right]+\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial c}-C\frac{\partial^2 C_1}{\partial x\partial c}}{\left(y_1\frac{\partial C}{\partial c}+\frac{\partial C_1}{\partial c}\right)^2}dy_1$$

folgen, worin A_1 eine willkürliche Function von x und c sein kann; da aber $f(x, y_1)$ eine algebraische Function von y_1 sein soll, so ergiebt sich als Bedingung dafür, dass der Logarithmus aus dem Integral herausfällt,

$$\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial c}-C\frac{\partial^2 C}{\partial x\partial c} = -C^2\frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{C}\right] = 0,$$

somit $\frac{\frac{\partial C}{\partial x}}{C}$ von c unabhängig, oder

$$C = \varphi(c)\psi(x),$$

worin φ und ψ noch willkürliche algebraische Functionen bedeuten; die für $f(x, y_1)$ nothwendige Form lautet also, wie man leicht einsieht,

$$f(x,\ y_1) = A_1\left(y_1\varphi'(c)\psi(x)+\frac{\partial C_1}{\partial c}\right)+\frac{C}{\frac{\partial C}{\partial c}}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial C_1}{\partial c}}{C}\right],$$

und ist somit jedenfalls eine ganze lineare Function von y_1. Wir werden somit auf den Fall der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx}+My+N = 0$$

zurückgeführt, worin M und N algebraische Functionen von x sind. Man sieht auch, ohne auf die im Anfange der Arbeit durchgeführte Discussion dieser Klasse von Differentialgleichungen zurückzugehen, unmittelbar, dass, weil vermöge der Relation

$$y = Cy_1+C_1$$

die beiden Beziehungen bestehen

$$\frac{dy_1}{dx}+My_1+N=0, \quad C\frac{dy_1}{dx}+y_1\frac{dC}{dx}+\frac{dC_1}{dx}+M(Cy_1+C_1)+N=0,$$

die durch Elimination von $\frac{dy_1}{dx}$ sich ergebende Gleichung

$$y_1\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C_1}{\partial x}+MC_1+N-CN = 0$$

für ein nicht algebraisches y_1 die Bedingung $\frac{\partial C}{\partial x}=0$ nach sich zieht, d. h. es wird C, wie wir es auch früher gesehen, unter allen Umständen eine Constante sein; soll auch C_1 eine Constante sein, so muss nach eben dieser Gleichung

$$MC_1+N(1-C) = 0$$

sein, d. h. es geht, wenn

$$y+\frac{C_1}{C-1} = z$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung erster Ordnung in

$$\frac{dz}{dx}+Mz = 0$$

über, also in die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

Wir erhalten somit das folgende Resultat:

Die einzige Gattung von Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form $\frac{dy}{dx}+f(x,y)=0$, ***für welche das allgemeine Integral eine ganze Function eines particulären Integrales sein soll, deren Coefficienten von der willkürlichen Constanten und der unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen, gehört in die Klasse der linearen Differentialgleichungen mit der Beziehung*** $y=cy_1+c_1$, ***worin*** c ***die willkürliche Constante und*** c_1 ***in der oben angegebenen Art algebraisch von*** x ***und*** c ***abhängt; soll auch*** c_1 ***eine Constante sein, so***

wird man auf homogene lineare Differentialgleichungen oder auf solche durch eine lineare Substitution aus diesen transformirte zurückgeführt.

Fragen wir jetzt allgemein, ob es Differentialgleichungen erster Ordnung von der Form (8.) giebt, für welche das allgemeine und ein particuläres Integral durch eine algebraische Beziehung von der Gestalt

$$(15.)\qquad y = F(x,\, y_1,\, c)$$

mit einander verbunden sind. Die Zusammenstellung der Gleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} + f(x,\, y_1) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + f(x,\, F(x,\, y_1,\, c)) = 0$$

liefert wieder

$$(16.)\qquad -\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} f(x,\, y_1) = f(x,\, F(x,\, y_1,\, c)),$$

und somit wieder unter der Voraussetzung, dass y_1 nicht eine algebraische Function von x ist, durch Differentiation nach y_1 und c und Elimination von

$$\frac{\partial f(x, F(x, y_1, c))}{\partial F(x, y_1, c)}$$

zwischen den beiden so entstehenden Gleichungen die Differentialgleichung erster Ordnung für $f(x, y_1)$:

$$\frac{\partial f(x, y_1)}{\partial y_1} + f(x, y_1) \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} \log \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}},$$

also durch Integration

$$(17.)\qquad f(x, y_1) = M \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y_1}} + \frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y_1}} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\frac{\partial F}{\partial y_1}}{\frac{\partial F}{\partial c}} dy_1,$$

worin M eine noch willkürliche Function von x und c ist, und es wird $f(x, y_1)$ den Bedingungen zu unterwerfen sein, dass es einerseits eine algebraische Function von y_1, andererseits von der willkürlichen Integrationsconstanten c unabhängig sein soll.

Werfen wir zuerst die Frage nach einer rational gebrochenen Beziehung zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale auf, und fassen die oben aufgestellte Gleichung

$$y_1 = F\{x,\, F(x,\, y_1,\, \varkappa),\, c\}$$

so auf, dass die Gleichung

$$y_1 = F(x, z, c)$$

zu einer ihrer Auflösungen die Grösse

$$z = F(x, y_1, \varkappa)$$

haben muss, so wird für die Annahme einer rational gebrochenen Beziehung die obige Gleichung

$$(18.) \qquad y_1 = \frac{A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \cdots + A_m}{B_0 z^n + B_1 z^{n-1} + \cdots + B_n}$$

und eine ihrer Auflösungen

$$(19.) \qquad z = \frac{a_0 y_1^m + a_1 y_1^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 y_1^n + b_1 y_1^{n-1} + \cdots + b_n}$$

sein, wenn $a_0, a_1, \dots a_m, b_0, b_1, \dots b_n$ dieselben algebraischen Functionen von $\varkappa$ bedeuten, wie es die $A_0, A_1, \dots A_m, B_0, B_1, \dots B_n$ von c sind, und Zähler und Nenner dieser rationalen Functionen keinen gemeinsamen Theiler haben, oder es wird (19.) in (18.) eingesetzt eine identische Gleichung liefern müssen, da y_1 keine algebraische Function von x sein soll. Ordnet man die Gleichung (18.) nach Potenzen von z, so sieht man, dass z, wenn $m > n$, für kein endliches y_1, wenn $m < n$, nur für $y_1 = 0$, und wenn $m = n$, nur für *einen* Werth von y_1 unendlich werden kann; da aber (19.) eine gebrochene Function in y_1 darstellen soll, so ist der Fall $m > n$ von selbst ausgeschlossen, und es muss der Nenner von z die n^{te} Potenz einer linearen Function von y_1 sein. Ferner wird $z = 0$ nur für den durch die Gleichung $A_m - B_n y_1 = 0$ definirten Werth von y_1 oder für $y_1 = \infty$, und es wird daher der Zähler von z die m^{te} Potenz dieser linearen Function von y_1 sein [illegible] so dass sich je nachdem $m < n$ oder $m = n$ die beiden Formen für z [illegible]

$$z = \frac{(a_0 y_1 + a_1)^m}{y_1^n} \quad \text{oder} \quad z = \left(\frac{a_0 y_1 + a_1}{b_0 y_1 + b_1}\right)^m;$$

man sieht leicht, dass diese beiden Beziehungen mit den [illegible]

$$y_1 = \frac{(A_0 z + A_1)^m}{z^n} \quad \text{oder} \quad y_1 = \left(\frac{A_0 z + A_1}{B_0 z + B_1}\right)^m$$

[illegible] können nur für den zweiten Fall und zwar nur für $m = 1$ [illegible] Beziehung. und findet daher als einzig möglichen Fall die [illegible]

Die einzige Klasse algebraischer Differential[illegible] *Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rational*[illegible] *function eines particulären Integrales sein soll, ist diejenige,* [illegible] *rationale Function eine lineare ist, deren Coefficienten* [illegible] *der unabhängigen Variabeln und der Integrations*[illegible]

Nehmen wir zuerst an, die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der linearen Substitution

$$(20.)\qquad y = \frac{\alpha y_1+\beta}{\gamma y_1+\delta}$$

seien Constanten, so folgt aus der oben allgemein für eine algebraische Beziehung gefundenen Form (17.) von $f(x, y_1)$, dass, weil

$$F(x, y_1, c) = \frac{\alpha y_1+\beta}{\gamma y_1+\delta},$$

also auch die partiellen Differentialquotienten nach y_1 und c genommen von x unabhängig sind,

$$f(x, y_1) = M.\frac{\frac{\partial F}{\partial c}}{\frac{\partial F}{\partial y_1}} = M.\frac{(\gamma y_1+\delta)\left(y_1\frac{\partial\alpha}{\partial c}+\frac{\partial\beta}{\partial c}\right)-(\alpha y_1+\beta)\left(y_1\frac{\partial\gamma}{\partial c}+\frac{\partial\delta}{\partial c}\right)}{\alpha\delta-\beta\gamma}$$

oder

$$(21.)\qquad f(x, y_1) = P.(Ay_1^2+By_1+C)$$

ist, worin P eine noch willkürliche algebraische Function von x, und A, B, C Constanten sind. Setzt man die eben gefundene nothwendige Form für $f(x, y_1)$ in die oben aufgestellte Functionalgleichung (16.), welche in unserem Falle in

$$(22.)\qquad f\left(x, \frac{\alpha y_1+\beta}{\gamma y_1+\delta}\right) = \frac{(\alpha\delta-\beta\gamma)}{(\gamma y_1+\delta)^2}f(x, y_1)$$

übergeht, ein, so erhält man zwischen den constanten Coefficienten der Function $f(x, y_1)$ und den Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jener algebraischen Beziehung die Relationen

$$\begin{aligned} A\alpha^2+2B\alpha\gamma\qquad\qquad+C\gamma^2 &= (\alpha\delta-\beta\gamma)A\\ A\alpha\beta+B(\alpha\delta+\beta\gamma)+C\gamma\delta &= (\alpha\delta-\beta\gamma)B\\ A\beta^2+B\beta\delta\qquad\qquad+C\delta^2 &= (\alpha\delta-\beta\gamma)C.\end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aber auch, dass, wenn $f(x, y_1)$ gleich ist dem Producte einer algebraischen Function von x in eine ganze Function zweiten Grades von y_1 mit constanten Coefficienten, also

$$(23.)\qquad \frac{dy}{dx} = P(y-a)(y-b)$$

ist,

$$\frac{1}{a-b}\log\frac{y-a}{y-b} = \int Pdx$$

oder

$$(24.)\qquad \frac{y-a}{y-b} = ce^{(a-b)\int Pdx}$$

sein wird, und somit

$$\frac{y_1 - a}{y_1 - b} = c_1 e^{(a-b)\int P dx},$$

woraus sich zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale die lineare Relation ergiebt

$$y = \frac{y_1(ac_1 - bc) - ab(c_1 - c)}{y_1(c_1 - c) + ac - bc_1}.$$

Für den Fall gleicher Lösungen $a = b$, wird

$$y = a - \frac{1}{\int P dx + c}$$

und es besteht somit ebenfalls die lineare Beziehung

$$y = \frac{y_1[a(c_1 - c) + 1] - a^2(c_1 - c)}{y_1(c_1 - c) - a(c_1 - c) + 1}.$$

Die einzige Klasse algebraischer Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche die algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale eine rationale gebrochene mit constanten Coefficienten ist, wird in der Form $\frac{dy}{dx} = P(Ay^2 + By + C)$ enthalten sein, worin P eine beliebige algebraische Function von x, und A, B, C beliebige Constanten sind, und allen diesen Differentialgleichungen kommt auch wirklich eine solche Beziehung zu.

So wird z. B. für die Differentialgleichung

$$(25.) \qquad \frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

aus

$$(26.) \quad y = \operatorname{tang}(x + c) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} c}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} c} \text{ und } y_1 = \operatorname{tang}(x + c_1) = \frac{\operatorname{tang} x + \operatorname{tang} c_1}{1 - \operatorname{tang} x \operatorname{tang} c_1}$$

die lineare gebrochene Beziehung

$$(27.) \qquad y = \frac{y_1(1 + CC_1) + C - C_1}{y_1(C_1 - C) + 1 + CC_1}$$

folgen, wenn $\operatorname{tang} c = C$, $\operatorname{tang} c_1 = C_1$ gesetzt wird. Zugleich mag an diesem Beispiel eine Verificirung der oben allgemein für alle Differentialgleichungen bewiesenen Sätze vorgenommen werden. Setzt man nämlich in (27.) y_1 statt y, und z statt y_1, so folgt

$$y_1 = \frac{z(1 + CC_1) + C - C_1}{z(C_1 - C) + (1 + CC_1)}$$

und hieraus

$$(28.) \qquad z = \frac{y_1(1 + CC_1) + C_1 - C}{y_1(C - C_1) + (1 + CC_1)},$$

und man sieht leicht, dass $\frac{dz}{dx} = 1+z^2$, also z wieder ein Integral der Gleichung (25.) ist; nun muss aber auch z als Integral dieser Differentialgleichung in der Form enthalten sein

$$(29.)\qquad z = \frac{y_1(1+KC_1)+K-C_1}{y_1(C_1-K)+(1+KC_1)},$$

und will man die Beziehung zwischen K und C haben, so braucht man nur die durch (28.) und (29.) gegebenen Werthe von z einander gleich zu setzen und die so entstehende quadratische Gleichung in y_1 identisch zu befriedigen. Man erhält dann

$$K = \frac{CC_1^2+2C_1-C}{2CC_1-C_1^2+1}.$$

Dass der Fall der constanten Coefficienten für eine gebrochene lineare Beziehung zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale nicht der einzige ist, mag das Beispiel lehren:

$$\frac{dy}{dx} = xy^2+y,$$

für welches

$$y = \frac{1}{ce^{-x}-(x-1)},$$

und somit die Beziehung folgt

$$y = \frac{c_1 y_1}{y_1(x-1)(c-c_1)+c}.$$

Werfen wir also nunmehr die Frage auf, für welche algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung die gesuchte Beziehung eine lineare gebrochene mit von x algebraisch abhängigen Coefficienten ist, so wird wiederum aus (17.) folgen, dass

$$(30.)\qquad f(x,\ y_1) = \frac{(\gamma y_1+\delta)\left(y_1\frac{\partial\alpha}{\partial c}+\frac{\partial\beta}{\partial c}\right)-(\alpha y_1+\beta)\left(y_1\frac{\partial\gamma}{\partial c}+\frac{\partial\delta}{\partial c}\right)}{\alpha\delta-\beta\gamma}\left\{M+\frac{\partial J}{\partial x}\right\},$$

worin

$$J = (\alpha\delta-\beta\gamma)\int\frac{dy_1}{(\gamma y_1+\delta)\left(y_1\frac{\partial\alpha}{\partial c}+\frac{\partial\beta}{\partial c}\right)-(\alpha y_1+\beta)\left(y_1\frac{\partial\gamma}{\partial c}+\frac{\partial\delta}{\partial c}\right)}$$

ist. Da nun im Allgemeinen

$$J = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial c}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial c}}\cdot\frac{1}{a-b}\log\left\{\frac{y_1-a}{y_1-b}\right\}$$

sein wird, worin a und b algebraische Functionen von x und c bedeuten,

so muss, da $f(x, y_1)$ eine algebraische Function von x und y_1 sein soll,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\left(\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial c}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial c}\right)(a-b)}\right] = 0$$

sein und somit, wie leicht zu sehen,

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{a-b}\,\frac{(y_1-a)\frac{\partial b}{\partial x}-(y_1-b)\frac{\partial a}{\partial x}}{(\gamma y_1+\delta)\left(y_1\frac{\partial\alpha}{\partial c}+\frac{\partial\beta}{\partial c}\right)-(\alpha y_1+\beta)\left(y_1\frac{\partial\gamma}{\partial c}+\frac{\partial\delta}{\partial c}\right)},$$

woraus sich $f(x, y_1)$ als ganze Function zweiten Grades von y_1 ergiebt, deren Coefficienten noch willkürliche algebraische Functionen von x sind. Sind wiederum die Lösungen a und b einander gleich, so wird

$$J = -\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial c}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial c}}\,\frac{1}{y_1-a}$$

und

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial c}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial c}}\right]\frac{1}{y_1-a}-\frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial c}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial c}}\,\frac{\frac{\partial a}{\partial x}}{(y_1-a)^2},$$

also $f(x, y_1)$ auch hierfür, wie leicht zu sehen, eine Function zweiten Grades in y_1.

Die einzige Klasse von algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, für welche das allgemeine Integral eine rationale gebrochene Function eines particulären Integrales sein soll, deren Coefficienten von der unabhängigen Variabeln und der Integrationsconstanten algebraisch abhängen, ist von der Form $\frac{dy}{dx} = Ay^2+By+C$, *worin* A, B, C *algebraische Functionen von* x *bedeuten, und zwar wird zwischen den Integralen dann nur eine lineare Relation mit im Allgemeinen von* x *algebraisch abhängigen Coefficienten stattfinden können; sind* A, B, C *Constanten, so wird auch umgekehrt stets für jede solche Differentialgleichung eine lineare Integralbeziehung, aber ebenfalls mit constanten Coefficienten existiren.*

Es bleibt die Frage zu erörtern, welchen Differentialgleichungen von der Form

$$(31.)\qquad \frac{dy}{dx} = Ay^2+By+C$$

auch wirklich eine lineare Integralbeziehung entspricht.

Macht man die Substitution

$$(32.)\qquad y = -\frac{1}{A}\,\frac{d\log u}{dx},$$

so geht die Differentialgleichung (31.) bekanntlich über in die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(33.)\qquad \frac{d^2u}{dx^2}+P\frac{du}{dx}+Qu = 0,$$

wenn

$$(34.)\qquad P = -\left(\frac{\frac{dA}{dx}}{A}+B\right),\quad Q = AC$$

gesetzt werden; sind u_1 und u_2 zwei particuläre Integrale der Gleichung (33.), also das allgemeine von der Form $C_1u_1+C_2u_2$, so wird, wenn $\frac{C_2}{C_1}=c$ gesetzt wird,

$$(35.)\qquad y = -\frac{\frac{du_1}{dx}+c\frac{du_2}{dx}}{A(u_1+cu_2)}$$

das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung (31.).

Soll nun zwischen y und y_1 ein rationaler linearer Zusammenhang von der Form

$$y = \frac{\alpha y_1+\beta}{\gamma y_1+\delta}$$

stattfinden, so muss wegen (35.) auch

$$(36.)\qquad \frac{\frac{du_1}{dx}+c\frac{du_2}{dx}}{A(u_1+cu_2)} = \frac{\alpha\left(\frac{du_1}{dx}+c_1\frac{du_2}{dx}\right)-\beta A(u_1+c_1u_2)}{-\gamma\left(\frac{du_1}{dx}+c_1\frac{du_2}{dx}\right)+\delta A(u_1+c_1u_2)}$$

oder

$$(36^a.)\qquad \begin{cases} -\gamma\frac{d\log(u_1+cu_2)}{dx}\cdot\frac{d\log(u_1+c_1u_2)}{dx}+\delta A\frac{d\log(u_1+cu_2)}{dx} \\ \qquad -\alpha A\frac{d\log(u_1+c_1u_2)}{dx}+\beta A^2 = 0 \end{cases}$$

sein; sind A, B, C constant, dann hat auch die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung constante Coefficienten, und ihre particulären Integrale sind $e^{\alpha x}$ und $e^{\beta x}$, die Gleichung (36.) enthält somit nach Wegschaffung der Nenner eine homogene lineare Function von $e^{2\alpha x}$, $e^{(\alpha+\beta)x}$, $e^{2\beta x}$ mit constanten Coefficienten, und man kann somit die Grössen α, β, γ, δ als Constanten so bestimmen, dass diese Gleichung befriedigt wird, was wieder auf den ersten oben bewiesenen Satz zurückführt.

Seien nun A, B, C algebraische Functionen von x, und bezeichnen η_1 und η_2 zwei beliebige, aber fest angenommene particuläre Integrale der

Gleichung (31), so werden

$$e^{-\int A\eta_1 dx} \quad \text{und} \quad e^{-\int A\eta_2 dx}$$

zwei beliebige, aber bestimmte particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung (33.) bedeuten, und daher zwei willkürliche particuläre Integrale derselben in der Form

$$(37.) \quad \begin{cases} u_1 = \mu_1 e^{-\int A\eta_1 dx} + \mu_2 e^{-\int A\eta_2 dx} \\ u_2 = \nu_1 e^{-\int A\eta_1 dx} + \nu_2 e^{-\int A\eta_2 dx} \end{cases}$$

dargestellt sein. Aus den Differentialbeziehungen

$$\frac{du_1}{dx} = -\mu_1 A\eta_1 e^{-\int A\eta_1 dx} - \mu_2 A\eta_2 e^{-\int A\eta_2 dx}, \quad \frac{du_2}{dx} = -\nu_1 A\eta_1 e^{-\int A\eta_1 dx} - \nu_2 A\eta_2 e^{-\int A\eta_2 dx},$$

folgt

$$(38.) \quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = -\dfrac{A(\mu_1\nu_2\eta_1 - \mu_2\nu_1\eta_2)}{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} u_1 + \dfrac{A\mu_1\mu_2(\eta_1 - \eta_2)}{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} u_2 \\ \dfrac{du_2}{dx} = -\dfrac{A\nu_1\nu_2(\eta_1 - \eta_2)}{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} u_1 + \dfrac{A(\nu_1\mu_2\eta_1 - \nu_2\mu_1\eta_2)}{\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} u_2, \end{cases}$$

und man sieht umgekehrt leicht, dass, wenn zwei particuläre Integrale u_1 und u_2 mit ihren Ableitungen in linearer Beziehung stehen, die Coefficienten derselben sich in der eben angegebenen Form ausdrücken lassen müssen.

Da man, wie früher gezeigt worden, in einer Beziehung

$$y = F(x, y_1, c)$$

zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale stets das particuläre Integral durch ein beliebiges anderes ersetzen darf, so kann man in der oben angenommenen linearen Relation zwischen y und y_1 das particuläre Integral y_1 dasjenige bedeuten lassen, welches man aus (35.) erhält, wenn man $c = 0$ setzt, so dass für $c_1 = 0$ die Gleichung (36.) durch die einfachere ersetzt werden kann

$$(39.) \quad \frac{\dfrac{du_1}{dx} + c\dfrac{du_2}{dx}}{A(u_1 + cu_2)} = \frac{\alpha\dfrac{du_1}{dx} + \beta Au_1}{-\gamma\dfrac{du_1}{dx} + \delta Au_1},$$

worin u_1 und u_2 die beiden willkürlichen particulären Integrale (37.) bedeuten mögen. Nimmt man zur weiteren Vereinfachung der Rechnung $\nu_1 = \mu_1$, $\nu_2 = -\mu_2$, so dass

$$(40.) \quad \begin{cases} u_1 = \mu_1 e^{-\int A\eta_1 dx} + \mu_2 e^{-\int A\eta_2 dx}, \\ u_2 = \mu_1 e^{-\int A\eta_1 dx} - \mu_2 e^{-\int A\eta_2 dx} \end{cases}$$

wird und die Differentialbeziehungen:

$$(41.)\quad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} = -\dfrac{A}{2}(\eta_1+\eta_2)u_1 - \dfrac{A}{2}(\eta_1-\eta_2)u_2, \\ \dfrac{du_2}{dx} = -\dfrac{A}{2}(\eta_1-\eta_2)u_1 - \dfrac{A}{2}(\eta_1+\eta_2)u_2, \end{cases}$$

so wird die Gleichung (39.), wie unmittelbar zu sehen, in

$$(42.)\quad \begin{cases} u_1^2\{-2\alpha(\eta_1+\eta_2)-4\beta+\gamma(\eta_1+\eta_2)[(1+c)\eta_1+(1-c)\eta_2] \\ \qquad\qquad +2\delta[(1+c)\eta_1+(1-c)\eta_2]\} \\ +u_1u_2\{-2\alpha[(1+c)\eta_1-(1-c)\eta_2]-4\beta c+2\gamma[(1+c)\eta_1^2-(1-c)\eta_2^2] \\ \qquad\qquad +2\delta[(1+c)\eta_1-(1-c)\eta_2]\} \\ +u_2^2\{-2\alpha c(\eta_1-\eta_2)+\gamma(\eta_1-\eta_2)[(1+c)\eta_1-(1-c)\eta_2] = 0 \end{cases}$$

übergehen.

Nehmen wir nun an, es habe die Differentialgleichung (31.) zwei algebraische Integrale, welche durch η_1 und η_2 dargestellt sein mögen, so wird man die Gleichung (42.) unabhängig von den Werthen von u_1 und u_2 befriedigen können *) durch algebraische Functionen von x für α, β, γ, δ, indem die Coefficienten von u_1^2, u_1u_2, u_2^2 identisch Null werden für

$$(43.)\quad \beta = \frac{-2\alpha c\eta_1\eta_2}{(1+c)\eta_1-(1-c)\eta_2},\quad \gamma = \frac{2\alpha c}{(1+c)\eta_1-(1-c)\eta_2},\quad \delta = \frac{\alpha[(1-c)\eta_1-(1+c)\eta_2]}{(1+c)\eta_1-(1-c)\eta_2},$$

---

*) Es mag bemerkt werden, dass ohne diese Annahme eine Beziehung zwischen u_1 und u_2 von der Form

$$Lu_1^2+Mu_1u_2+Nu_2^2 = 0,$$

in der L, M, N algebraische Functionen von x bedeuten, nicht stattfinden kann; denn da sich hieraus $u_2 = T.u_1$ ergeben würde, worin T ebenfalls algebraisch aus x zusammengesetzt ist, und bekanntlich für die Differentialgleichung (33.) die Beziehung besteht

$$u_1^2\frac{d\left(\frac{u_2}{u_1}\right)}{dx} = ce^{-\int Pdx},$$

so würde

$$u_1 = Ue^{-\frac{1}{2}\int Pdx} \quad\text{oder}\quad \frac{d\log u_1}{dx} = \frac{\frac{dU}{dx}}{U}-\tfrac{1}{2}P$$

folgen, worin U eine algebraische Function von x ist, daher $\frac{d\log u_1}{dx}$ und $\frac{d\log u_2}{dx}$, und somit vermöge der Gleichung $y = -\frac{1}{A}\frac{d\log u}{dx}$ zwei Integrale der vorgelegten Differentialgleichung erster Ordnung algebraische Functionen von x.

welche Werthe bestimmte algebraische Functionen bedeuten, da

$$(1+c)\eta_1-(1-c)\eta_2$$

nicht für willkürliche Werthe von c verschwinden kann, und die Constante c linear enthalten; wir finden zugleich die Beziehung zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale der vorgelegten Differentialgleichung erster Ordnung in der Form

$$(44.)\qquad y = \frac{[(1+c)\eta_1-(1-c)\eta_2]y_1-2c\eta_1\eta_2}{2cy_1+[(1-c)\eta_1-(1+c)\eta_2]};$$

so wird z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx}+y^2+xy+\frac{x^2}{4} = 0,$$

welche die beiden particulären algebraischen Integrale besitzt

$$\eta_1 = \frac{-x+\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad \eta_2 = \frac{-x-\sqrt{2}}{2},$$

eine lineare Beziehung zwischen dem allgemeinen Integrale y und einem beliebigen — aber transcendenten — particulären Integrale von der Form liefern

$$y = \frac{(\sqrt{2}-cx)y_1-\frac{c}{2}(x^2-2)}{2cy_1+(\sqrt{2}+cx)},$$

welche auch unmittelbar aus der Existenz des allgemeinen Integrales

$$y = -\frac{x}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\frac{ke^{-x\sqrt{2}}+1}{ke^{-x\sqrt{2}}-1},$$

welches für $c=0$ und $c=\infty$ in die beiden algebraischen Integrale übergeht, gefolgert werden konnte.

Für den Fall, dass A, B, C Constanten sind, hat die Differentialgleichung (31.) jedenfalls zwei algebraische Integrale nämlich die beiden constanten Lösungen der Gleichung

$$Ay^2+By+C = 0$$

und in Folge dessen werden sich wieder für die lineare Integralbeziehung α, β, γ, δ ebenfalls als Constanten ergeben, wie schon früher nachgewiesen worden.

Wir finden somit, *dass, wenn die vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung zwei particuläre algebraische Integrale besitzt, stets eine lineare Beziehung mit algebraischen Coefficienten zwischen ihrem allgemeinen und einem transcendenten particulären Integrale besteht, vorausgesetzt, dass ein solches existirt.*

Es mag noch bemerkt werden, dass für jede Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = Ay^2 + By + \left[\frac{B^2}{4A} - A - \frac{1}{2A}\frac{dB}{dx} + \frac{B}{2A^2}\frac{dA}{dx}\right],$$

in welcher A und B beliebige algebraische Functionen von x bedeuten, ein linearer Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale stattfinden wird, da dieselbe die beiden algebraischen Integrale besitzt

$$\eta_1 = -\frac{B}{2A} - 1, \quad \eta_2 = -\frac{B}{2A} + 1.$$

Gehen wir nunmehr wieder zur Gleichung (42.) zurück, nehmen aber an, dass die Gleichung (31.) nicht zwei particuläre algebraische Integrale besitzt, so wird man nicht aus derselben schliessen können, dass sie sich identisch befriedigen lässt durch algebraische Functionen für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ also auch nicht die gesuchte lineare Relation (39.) daraus folgern können.

Seien y_1 und y_2 zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung (31.), die also nicht beide algebraisch sind, so wird man eines von beiden zu demjenigen Integrale machen können, dass in die gesuchte lineare Integralrelation eintreten soll, und setzt man daher

$$(45.)\qquad u_1 = e^{-\int Ay_1 dx}, \quad u_2 = e^{-\int Ay_2 dx},$$

so wird die Gleichung (39.) in

$$(46.)\qquad \frac{e^{-\int Ay_1 dx}.y_1 + ce^{-\int Ay_2 dx}.y_2}{e^{-\int Ay_1 dx} + ce^{-\int Ay_2 dx}} = \frac{\alpha y_1 + \beta}{\gamma y_1 + \delta}$$

übergehen, oder wenn zur Abkürzung

$$\frac{\alpha y_1 + \beta}{\gamma y_1 + \delta} = f(y_1)$$

gesetzt wird, in

$$(47.)\qquad e^{\int A(y_1 - y_2)dx} = -c\frac{f(y_1) - y_2}{f(y_1) - y_1},$$

wo die Constante c auch noch in den Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ der Function $f(y_1)$ enthalten ist, und die Gleichung (47.) für jeden Werth von c bestehen soll; zugleich mit der Gleichung (47.) wird auch die durch Differentiation nach c hervorgehende

$$(f(y_1)-y_2)(y_1-f(y_1))+c(y_1-y_2)\frac{\partial f(y_1)}{\partial c} = 0$$

und die durch logarithmische Differentiation nach x hervorgehende

$$A(y_1-y_2) = \frac{f'(y_1)(Ay_1^2+By_1+C)+\frac{\partial f(y_1)}{\partial x}-(Ay_2^2+By_2+C)}{f(y_1)-y_2} - \frac{(1-f'(y_1))(Ay_1^2+By_1+C)-\frac{\partial f(y_1)}{\partial x}}{y_1-f(y_1)}$$

bestehen müssen. Es mag nur noch zur Vermeidung von Missverständnissen bemerkt werden, dass, wenn der Ausdruck des allgemeinen Integrales auf irgend welche Weise in der Form

$$(a.) \qquad y = \frac{\alpha y_1+\beta}{\gamma y_1+\delta}$$

gefunden ist, worin α, β, γ, δ von c abhängen, das c der Gleichungen (46.) und (47.) nicht dasselbe wird sein müssen, sondern dass, wenn die willkührliche Constante in α, β, γ, δ des Ausdruckes (*a.*) mit x bezeichnet wird, x eine bestimmte Function von c sein wird, da die allgemeinen Integrale sich nicht zu entsprechen brauchen; so wird, wie man sich leicht überzeugt in dem oben gewählten Beispiele, in welchem die Integrale in der Form sich ergaben

$$y = \frac{(\sqrt{2}-cx)y_1-\frac{c}{2}(x^2-2)}{2cy_1+(\sqrt{2}+cx)} \quad \text{und} \quad y = -\frac{x}{2}+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{xe^{-x\sqrt{2}}+1}{xe^{-x\sqrt{2}}-1},$$

wenn y_1 dem Constantenwerthe x_1 entsprechen soll,

$$c = \frac{x-x_1}{x+x_1}$$

sein müssen.

Man wird nun die Frage nach den Bedingungen, unter denen zwischen y und y_1 eine lineare Relation von der Form (*a.*) besteht mit der Frage nach der Irreductibilität einer algebraischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Verbindung bringen können. Setzt man nämlich

$$y_2 = \frac{\alpha_2 y_1+\beta_2}{\gamma_2 y_1+\delta_2},$$

worin α_2, β_2, γ_2, δ_2 algebraische Functionen von x bedeuten, so wird man nach (47.):

$$(48.)\quad \begin{cases} J = e^{\int A(y_1 - y_2)dx} = e^{\int \frac{A(\gamma_2 y_1^2 + (\delta_2 - \alpha_2)y_1 - \beta_2)dx}{\gamma_2 y_1 + \delta_2}} \\ = \frac{(\alpha\gamma_2 - \alpha_2\gamma)y_1^2 + [\beta\gamma_2 - \beta_2\gamma + \alpha\delta_2 - \alpha_2\delta]y_1 + \beta\delta_2 - \beta_2\delta}{(-\gamma y_1^2 + (\alpha - \delta)y_1 + \beta)(\gamma_2 y_1 + \delta_2)} = F(x, y_1) \end{cases}$$

erhalten, worin $F(x, y_1)$ eine algebraische Function von x und y_1 bedeutet.

Beachtet man, dass aus der Definition von J sich

$$(49.)\quad \frac{d\log J}{dx} = \frac{\frac{dJ}{dx}}{J} = A\left(\frac{\gamma_2 y_1^2 + (\delta_2 - \alpha_2)y_1 - \beta_2}{\gamma_2 y_1 + \delta_2}\right) = \varphi(x, y_1)$$

ergiebt und hieraus vermöge der Gleichung (31.)

$$(50.)\quad \frac{d^2\log J}{dx^2} = \frac{J\frac{d^2J}{dx^2} - \left(\frac{dJ}{dx}\right)^2}{J^2} = \frac{\partial\varphi(x, y_1)}{\partial x} + \frac{\partial\varphi(x, y_1)}{\partial y_1}(Ay_1^2 + By_1 + C),$$

so folgt durch Elimination von y_1 zwischen (49.) und (50.) die algebraische Differentialgleichung zweiter Ordnung für J

$$(51.)\quad \omega\left(x, \frac{d\log J}{dx}, \frac{d^2\log J}{dx^2}\right) = 0.$$

Andererseits liefert die Gleichung (48.) die Beziehung

$$(52.)\quad \frac{dJ}{dx} = \frac{\partial F(x, y_1)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y_1)}{\partial y_1}(Ay_1^2 + By_1 + C)$$

und durch Elimination von y_1 zwischen (48.) und (52.) die Differentialgleichung erster Ordnung

$$(53.)\quad \Omega\left(x, J, \frac{dJ}{dx}\right) = 0;$$

wir sehen somit, dass, wenn die Differentialgleichung (31.) die Eigenschaft besitzen soll, dass ihr allgemeines Integral in linearer Beziehung zu *einem* particulären Integrale stehen soll, die Differentialgleichung (51.) eine reductible sein muss, und es wären zur weiteren Durchführung dieser Untersuchung die Irreductibilitätsbedingungen dieser Differentialgleichung festzustellen.

Wir verfolgen diese Frage nicht weiter, sondern wenden uns jetzt zur Untersuchung der allgemeinen algebraischen Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung; so liefert z. B. die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)}{(y-\alpha)(y-\beta)+(y-\alpha)(y-\gamma)+(y-\beta)(y-\gamma)} \cdot f(x)$$

als allgemeines Integral

$$(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma) = ce^{\int f(x)\,dx}$$

und somit die gesuchte Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale in der Form:

$$c_1(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)-c(y_1-\alpha)(y_1-\beta)(y_1-\gamma) = 0.$$

Nehmen wir an, dass die gesuchte Beziehung

$$(54.) \quad y = F(x,\ y_1,\ c)$$

ist, so wird die rechte Seite der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y)$$

nach Gleichung (17.) die Form haben

$$(55.) \quad f(x,\ y_1) = M\frac{\frac{\partial F(x,y_1,c)}{\partial c}}{\frac{\partial F(x,y_1,c)}{\partial y_1}}+\frac{\frac{\partial F(x,y_1,c)}{\partial c}}{\frac{\partial F(x,y_1,c)}{\partial y_1}}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{\frac{\partial F(x,y_1,c)}{\partial y_1}}{\frac{\partial F(x,y_1,c)}{\partial c}}dy_1,$$

worin M eine noch willkürliche algebraische Function von x und c bezeichnet.

Bevor wir die Form von $f(x, y_1)$ weiter präcisiren, mag bemerkt werden, dass nach früher angeführten Sätzen die beiden Gleichungen

$$y_1 = F(x,\ z,\ c) \quad \text{und} \quad z = F(x,\ y_1,\ \varkappa)$$

zu gleicher Zeit bestehen müssen, worin $\varkappa$ als bestimmte Function von c aufzufassen ist, oder anders ausgesprochen, es muss die Beziehung $y_1 = F(x, z, c)$ bestehen bleiben, wenn y_1 und z vertauscht werden, wenn man nur überall c durch $\varkappa$ ersetzt. Sei nun die eben bezeichnete Gleichung

$$(56.) \quad \varphi_0(x,\ z,\ c)y_1^m+\varphi_1(x,\ z,\ c)y_1^{m-1}+\cdots+\varphi_{m-1}(x,\ z,\ c)y_1+\varphi_m(x,\ z,\ c) = 0,$$

in welcher die φ-Functionen ganze Functionen von x und z sein werden, so wird auch:

$$(57.) \quad \varphi_0(x,\ y_1,\ \varkappa)z^m+\varphi_1(x,\ y_1,\ \varkappa)z^{m-1}+\cdots+\varphi_{m-1}(x,\ y_1,\ \varkappa)z+\varphi_m(x,\ y_1,\ \varkappa) = 0$$

sein, und da die zweite Gleichung aus der ersten durch Substitution von y_1, z und $\varkappa$ statt z, y_1 und c hervorgegangen ist, so werden auch die φ ganze Functionen m^{ten} Grades von z sein, und es werden die beiden Gleichungen in der Form darstellbar sein

$$(58.) \quad \begin{cases} (a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots)y_1^m+(b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots)y_1^{m-1}+\cdots \\ \qquad\qquad\cdots+(m_0z^m+m_1z^{m-1}+\cdots) = 0, \\ (A_0y_1^m+A_1y_1^{m-1}+\cdots)z^m+(B_0y_1^m+B_1y_1^{m-1}+\cdots)z^{m-1}+\cdots \\ \qquad\qquad\cdots+(M_0y_1^m+M_1y_1^{m-1}+\cdots) = 0, \end{cases}$$

worin A_α, B_α, ... M_α aus a_α, b_α, ... m_α durch Substitution von x statt c erhalten werden. Stellen wir die zweite dieser Gleichungen mit der ersten in der Form

$$(a_0 y_1^m + b_0 y_1^{m-1} + \cdots + m_0) z^m + (a_1 y_1^m + b_1 y_1^{m-1} + \cdots + m_1) z^{m-1} + \cdots = 0$$

zusammen und eliminiren z, so muss sich, da y_1 nicht ein algebraisches particuläres Integral der Differentialgleichung erster Ordnung sein sollte, eine in y_1 identische Gleichung ergeben. Eliminirt man z^m aus jenen beiden Gleichungen, so ergiebt sich eine Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in z, deren Coefficienten wiederum ganze Functionen von x und y_1 sein werden; nimmt man aber an, dass die Gleichung (56.) irreductibel in y_1, also (57.) irreductibel in z ist, so muss diese Gleichung $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades in z identisch verschwinden; aber da die Coefficienten gleich Null gesetzt wieder y_1 als algebraische Function definiren würden, so muss jenes identische Verschwinden der Coefficienten der z-Potenzen auch für beliebige Werthe von y_1 stattfinden, und wir bekommen Beziehungen von der Form:

$$A_0 a_1 = B_0 a_0, \; A_0 b_1 + A_1 a_1 = B_0 b_0 + B_1 a_0, \; A_0 c_1 + A_1 b_1 + A_2 a_1 = B_0 c_0 + B_1 b_0 + B_2 a_0, \; \ldots$$

ebenso

$$A_0 a_2 = C_0 a_0, \; A_0 b_2 + A_1 a_2 = C_0 b_0 + C_1 a_0, \; \ldots$$

und ähnliche, welche alle durch dieselbe Beziehung zwischen x und c befriedigt werden müssen.

Betrachten wir aber jetzt wieder den speciellen Fall, in welchem die gesuchte Relation zwischen dem allgemeinen und particulären Integrale x nicht explicite enthält, also von der Form ist

$$(59.) \quad y = F(y_1, c),$$

so wird

$$(60.) \quad f(x, y_1) = M \frac{\frac{\partial F(y_1, c)}{\partial c}}{\frac{\partial F(y_1, c)}{\partial y_1}}$$

sein, worin M eine der Form nach noch weiter zu bestimmende algebraische Function von x und c ist, $f(x, y_1)$ jedoch selbst c nicht enthalten darf. Denkt man sich in (60.) $c = 0$ gesetzt, so folgt

$$f(x, y) = \mu(x)\lambda(y),$$

worin $\mu(x)$ und $\lambda(y)$ reine algebraische Functionen von x und y sind, und wir erhalten alle Differentialgleichungen von der gesuchten Eigenschaft in

der Form

$$(61.)\qquad \frac{dy}{dx} = \mu(x)\lambda(y).$$

Fragen wir nun umgekehrt, welchen Differentialgleichungen von dieser Form auch wirklich eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und *einem* particulären Integrale entspricht, so kann wegen

$$\frac{dy}{\lambda(y)} = \mu(x)\,dx, \quad \frac{dy_1}{\lambda(y_1)} = \mu(x)\,dx,$$

die Frage auch so gestellt werden: Wann hat die Differentialgleichung

$$(62.)\qquad \frac{dy}{\lambda(y)} = \frac{dy_1}{\lambda(y_1)}$$

ein allgemeines algebraisches Integral? Ist nun α ein willkürlicher constanter Werth und sei $y_{y_1=\alpha} = C$, so können wir das Integral der Gleichung (62.) in die Form setzen

$$(63.)\qquad \int_\alpha^y \frac{d\eta}{\lambda(\eta)} - \int_\alpha^{y_1} \frac{d\eta}{\lambda(\eta)} = \int_\alpha^C \frac{d\eta}{\lambda(\eta)};$$

eliminirt man nun zwischen

$$y = F(y_1,\ c) \quad \text{und} \quad C = F(\alpha,\ c)$$

die Constante c, so folgt eine algebraische Beziehung

$$(64.)\qquad C = F_1(y,\ y_1,\ \alpha)$$

als Integral von (62.), d. h. das Integral

$$\int \frac{d\eta}{\lambda(\eta)}$$

hat ein algebraisches Additionstheorem. Lassen sich umgekehrt zwei gleichartige Integrale dieser Form zu *einem* solchen vereinigen mit algebraischer Relation zwischen den oberen Grenzen, so wird jede Differentialgleichung von der Gestalt

$$\frac{dy}{dx} = \mu(x)\lambda(y)$$

wegen

$$\frac{dy}{\lambda(y)} = \frac{dy_1}{\lambda(y_1)}$$

oder der daraus folgenden Gleichung (63.) eine algebraische Beziehung zwischen dem allgemeinen und einem particulären Integrale liefern, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ so beschaffen ist, dass ihr allgemeines Integral eine algebraische Function eines particulären Integrales und einer willkürlichen Constanten ist, ist die, dass $f(x, y) = \mu(x).\lambda(y)$, worin $\mu(x)$ eine willkürliche algebraische Function von x und $\lambda(y)$ eine solche algebraische Function von y bedeutet, dass $\frac{dy}{\lambda(y)}$ ein Differential erster Gattung vom Geschlechte 1 ist.

Wien, Januar 1881.

Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variabeln.

(Von *L. Kronecker.*)

Vorbemerkung.

Die Abhandlung, deren ersten Theil ich hier veröffentliche, ist von mir in der Sitzung der hiesigen Akademie der Wissenschaften am 16. Januar 1862 vorgetragen worden. Von anderen Untersuchungen, deren Resultate sich in den Monatsberichten desselben Jahres angegeben finden, aufs Lebhafteste in Anspruch genommen, habe ich damals unterlassen, die Abhandlung in den Denkschriften der Akademie, für welche sie bestimmt war, zum Abdruck zu bringen. Aber ich habe den wesentlichen Inhalt der darin gegebenen Entwickelungen schon in jener Zeit und seitdem regelmässig in meinen an der hiesigen Universität gehaltenen Vorlesungen mitgetheilt, die weitreichende Bedeutung des einfachen Princips derselben eingehend erörtert und das Interesse daran, wie ich von Manchen meiner Zuhörer im näheren persönlichen Verkehr erfahren habe, von Anfang an erweckt und in weiteren Kreisen verbreitet. So habe ich namentlich, um nur eine meiner älteren Universitäts-Vorlesungen anzuführen, im Wintersemester 1865/66 unter Zugrundelegung des Begriffs der ganzen algebraischen Grössen und Zahlen die allgemeinen Principien für die Zusammenfassung aller durch einander rational ausdrückbaren algebraischen Grössen sowie für deren Darstellung als homogene lineare Functionen einer gewissen Anzahl derselben vollständig dargelegt und im Wintersemester 1870/71 an die bezüglichen Erörterungen eine ausführliche Behandlung der algebraischen Functionen einer Variabeln, also des speciellen Gegenstandes der vorliegenden Abhandlung geknüpft. Unter meinen Zuhörern von 1865/66 befanden sich die Herren *Brill, Kiepert, Lüroth, Schwarz,* unter denen von 1870/71 die Herren *Dantscher, Kiepert,*

Stickelberger, Stolz, in der Zwischenzeit namentlich auch die Herren *Netto* und *Frobenius,* und Herr *Netto* hat erst neuerdings im vorigen Bande dieses Journals interessante Untersuchungen veröffentlicht, bei welchen der Inhalt jener Vorlesungen den Ausgangspunkt bildet.

Auf das Princip, welches den folgenden Entwickelungen zu Grunde liegt, wurde ich durch allgemeine, die Theorieen complexer Zahlen betreffende Untersuchungen im Jahre 1857 geführt. Die Allgemeinheit der Untersuchungen leitete unmittelbar auf den Begriff der ganzen algebraischen Zahlen als Wurzeln ganzzahliger Gleichungen $F(x) = 0$, d. h. solcher, in welchen der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich *Eins* und die übrigen Coefficienten ganze Zahlen sind; bei der Behandlung specieller Theorieen complexer Zahlen bot sich die Auffassung derselben als ganzer ganzzahliger Functionen einer bestimmten ganzen algebraischen Zahl zunächst dar. Dabei erhoben sich aber gewisse Schwierigkeiten, die freilich einzig und allein die Bestimmung der complexen Discriminanten-Factoren betrafen, und auch nur dann auftraten, wenn die behandelten speciellen complexen Zahlen die Eigenschaft zeigten, dass dabei ganze algebraische Zahlen in der Form gebrochener complexer Zahlen, d. h. ganzer Functionen der zu Grunde gelegten algebraischen Zahl mit gebrochenen Zahlcoefficienten erscheinen konnten. Diese Schwierigkeiten brachten mich nach einiger Ueberlegung in dem bezeichneten Jahre zu der Erkenntniss, dass es eine theils unnütze, theils schädliche Beschränkung ist, die rationalen Functionen einer durch eine algebraische Gleichung definirten Grösse x nur in der Form von ganzen Functionen von x, d. h. also, wenn n den Grad der Gleichung bezeichnet, als lineare homogene Functionen der n Grössen $1, x, x^2, \dots x^{n-1}$ darzustellen, dass vielmehr die allgemeinere Darstellung derselben durch lineare homogene Formen von irgend welchen n rationalen von einander linear unabhängigen Functionen von x durch die Natur der Sache geboten ist. Hierdurch wird es nämlich ermöglicht, Formen complexer Zahlen aufzustellen, in denen jede ganze algebraische Zahl auch ganz erscheint, und damit die oben angedeuteten Schwierigkeiten zu beseitigen. Die Zweckmässigkeit solcher Formen hatte sich auch schon bei den *Kummer*schen Arbeiten über die aus den Perioden von Einheitswurzeln gebildeten complexen Zahlen gezeigt, und dabei war auch schon jenes Schema der bestimmenden Coefficienten aufgetreten, welches durch die Bedingung gegeben wird, dass bei der Multiplication linearer Formen von n Elementen

mit ganzzahligen Coefficienten eine ebensolche Form resultirt. Durch diese Bedingung werden die Elemente unmittelbar als ganze algebraische Zahlen bestimmt, und zwar als solche, die sämmtlich durch eine derselben rational ausdrückbar sind, also einer und derselben „Gattung" angehören.

Damals schon in regem persönlichen Verkehr mit meinem Freunde *Weierstrass* stehend, machte ich demselben Schritt vor Schritt von dem Fortgange meiner arithmetischen Untersuchungen Mittheilung, und als ich ihm nach kurzer Zeit die neu gewonnene Erkenntniss darlegen konnte, dass in der Theorie specieller complexer Zahlen an Stelle der ganzen Functionen einer Grösse homogene lineare Functionen einer gewissen Anzahl zusammengehöriger Grössen zu Grunde gelegt werden müssen, damit alle Schwierigkeiten und Ausnahmen beseitigt würden, da forderte er mich auf, dieselben Principien auf algebraische Functionen einer Variabeln anzuwenden, um womöglich auch dabei die analogen umständlichen Betrachtungen entbehrlich zu machen, welche bei der Behandlung der Integrale algebraischer Functionen, wenn alle möglichen Singularitäten der zu Grunde gelegten Gleichung zugelassen werden, zunächst erforderlich erschienen. Dies ward mir der erste Anlass zu rein algebraischer, von geometrischer Interpretation wie von analytischen Hülfsmitteln absehender Behandlung der algebraischen Functionen einer Variabeln, und ich habe meinem Freunde *Weierstrass* auf seinen Wunsch eine schriftliche Auseinandersetzung der Resultate nebst deren Herleitung am 19. October 1858 (mit diesem Datum bezeichnet) übergeben, von welcher er auch damals bei seinen analytischen Untersuchungen Gebrauch machen konnte. Aber gerade die weiteren Ergebnisse dieser *Weierstrass*schen analytischen Untersuchungen waren es, welche meine bezüglichen algebraischen in meinen Augen überflüssig machten, und mich — nachdem ich die Veröffentlichung im Jahre 1862 unterlassen hatte — später von der Publication abstehen liessen. Herr *Weierstrass* gelangte nämlich zu einer wirklichen Darstellung der von ihm so genannten Primfunctionen — welche den *Kummer*schen idealen Primfactoren entsprechen — in transcendenter Form, und damit wurde das eigentliche Fundament der Theorie der algebraischen Functionen bloss gelegt und jede auf algebraische Mittel beschränkte Behandlung überholt. Der Anlass dazu, dass ich nunmehr dennoch, und nach so langer Zeit, meine Arbeit aus dem Jahre 1862 abdrucken lasse, liegt in einer Verabredung mit den Herren *Dedekind* und *Weber*. Als ich im vorigen Jahre eine willkommene Gelegenheit fand und ergriff, Herrn *Dedekind* meine, als eines

Mitstrebenden, Anerkennung auszudrücken, und ihm dabei schrieb, dass ich schon seit lange im Besitze der den seinigen vielfach verwandten Principien der Theorieen complexer Zahlen *) sei und diese auch für algebraische Fragen benutzt habe, theilte er mir in richtiger Voraussetzung des speciellen Gegenstandes mit, dass auch er seinerseits in neuerer Zeit und zwar im Vereine mit Herrn *Weber* jene Principien auf die Behandlung algebraischer Functionen einer Variabeln angewendet habe. Als nun später Herr *Weber* die von ihm und Herrn *Dedekind* verfasste Arbeit für das Journal zusagte, entschloss ich mich im Einvernehmen mit denselben, meine eigene bezügliche Abhandlung vom Jahre 1862 kurz vor der ihrigen und, bevor ich von derselben Kenntniss nähme, zum Abdruck zu bringen. Ich habe desshalb die inzwischen von Herrn *Weber* eingesandte Arbeit uneröffnet in die Hände des Herrn Prof. *Lampe* gelangen lassen, der seit lange den speciellen Redactionsgeschäften vorsteht, und dieselbe wird im nächsten Bande dieses Journals Aufnahme finden.

Ich habe geglaubt an meinem Manuscript vom Jahre 1862 keinerlei Veränderungen vornehmen zu sollen, wenngleich die Breite der Behandlung mir heute wenig zusagt. Auch die Bezeichnung „wesentlicher und ausserwesentlicher Theiler der Discriminante“ habe ich, obgleich ich davon später seltneren Gebrauch gemacht habe **), unverändert beibehalten, weil sie von jener Zeit her aus meinen Universitäts-Vorlesungen und privaten Mittheilungen vielfach Aufnahme und Verbreitung gefunden haben. Schon bei Abfassung der Arbeit habe ich absichtlich, um den an die zahlentheoretische Entstehung anknüpfenden Charakter der Entwickelungen nicht zu ändern, den Gesichtspunkt durchaus festgehalten, die eine der Variabeln v als eine „unbestimmte“ Grösse, die andere x als deren algebraische Function zu betrachten, obgleich es begreiflicherweise sachgemässer ist, die gegenseitige Abhängigkeit der beiden Variabeln, das durch ihren Zu-

---

*) Gemeinsam ist Herrn *Dedekinds* und meiner Behandlungsweise das oben dargelegte Princip der Darstellung complexer Zahlen und Alles, was daraus fliesst; aber die Auffassung und Erklärung der Divisoren, von der ich ausgehe, ist von der des Herrn *Dedekind* verschieden, wenn auch natürlich die schliesslichen, von jeder Definition der complexen Divisoren unabhängigen Resultate dieselben sind. Ueberdies besteht auch eine Verschiedenheit in Bezug auf die Frage einer naturgemässen Darstellung der Divisoren, deren Erledigung mir, bei meiner Art des Eintretens in die bezüglichen Untersuchungen, von Anfang an als letztes Ziel erscheinen musste, während dies bei Herrn *Dedekinds* Ausgangspunkt nicht der Fall war.

**) Die modificirten Bezeichnungen finden sich in einem später folgenden Aufsatze.

sammenhang constituirte algebraische Gebilde in das Auge zu fassen. Ich möchte es als eines der Hauptergebnisse der Arbeit — welches ich schon im Jahre 1858 *Riemann* mitgetheilt habe — bezeichnen, dass die Behandlung jenes so zu sagen allgemeinen oder regulären Falles algebraischer Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen, auf den sich *Riemann* mit dem Bemerken beschränkt hat (Theorie der *Abel*schen Functionen Bd. 54 S. 127), dass sich „die Resultate auf die übrigen als Grenzfälle leicht ausdehnen lassen", auch dessbalb genügt, weil sich die anderen Gleichungen in solche transformiren lassen. Durch die bezüglichen Darlegungen gewinnt man auch erst für das von *Riemann* citirte Verfahren von *Lagrange* festen Boden, da sonst die Bestimmung fehlt, bis zu welchem Gliede man die Reihe zu untersuchen hat, um über die Verschiedenheit der Reihenentwickelungen eine Entscheidung zu erlangen. Endlich wird damit jene Mannigfaltigkeit der bei den Reihenentwickelungen algebraischer Functionen vorkommenden Besonderheiten, welche die Behandlung derselben so complicirt erscheinen lässt, völlig entwirrt, indem vorher die Gleichung in eine solche zu transformiren ist, für welche $v-a$, wenn v die unabhängige Variable ist und nach Potenzen von $v-a$ entwickelt werden soll, nicht zu den ausserwesentlichen Factoren der Discriminante gehört. Die ursprünglich verlangte Reihenentwickelung ergiebt sich dann als eine rationale Function der neuen „regulären", und es offenbart sich hierin der Grund der vielen Complicationen, welche die Reihenentwickelungen algebraischer Functionen darbieten können. Schliesslich möchte ich das werthvolle methodische Hülfsmittel der unbestimmten Coefficienten hervorheben, welches ich schon in früher Zeit, z. B. in einem kleinen, im XIX. Bande von *Liouville*s Journal abgedruckten Aufsatze, und seitdem stets bei meinen algebraischen und arithmetischen Untersuchungen in der umfassendsten Weise benutzt habe. Bei den Entwickelungen welche in den §§ 5, 6 und 8 dieses Aufsatzes enthalten sind, bei der Theorie der Elimination, wie ich sie in meinen Universitäts-Vorlesungen zu geben pflege und durch den Druck zu veröffentlichen im Begriffe stehe, bei der Theorie der verschiedenen „Classen" von Gleichungen, die im *Galois*schen Sinne besondere Gruppen von Substitutionen haben, endlich zumal bei der allgemeinen Theorie algebraischer Grössen, wie sie in einem folgenden Aufsatze skizzirt werden soll, findet jenes methodische Hülfsmittel die ausgedehnteste und erfolgreichste Verwendung.

Berlin, August 1881.

§ 1.

Wenn eine Grösse x von gewissen Variabeln $\mathfrak{v}, \mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \ldots$ in der Weise abhängt, dass sie Wurzel einer Gleichung n^{ten} Grades ist, deren Coefficienten die Grössen $\mathfrak{v}$ nur rational enthalten, so wird x im Allgemeinen als algebraische Function der Variabeln $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Denkt man sich die irreductible Gleichung $F(x, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}', \ldots) = 0$, durch welche x als algebraische Function von $\mathfrak{v}, \mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \ldots$ definirt wird, auf die Form gebracht, dass darin der Coefficient von x^n gleich Eins ist, so werden die übrigen Coefficienten rationale, ganze oder gebrochene Functionen der Variabeln $\mathfrak{v}$ sein. Da es nun für die Natur der algebraischen Function x einen wesentlichen Unterschied bedingt, ob $F(x, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \ldots)$ auch in Bezug auf die Grössen $\mathfrak{v}$ eine ganze Function ist oder nicht, so soll im ersteren Falle — analog der herkömmlichen Ausdrucksweise für die rationalen Functionen — x als *ganze* algebraische Function von $\mathfrak{v}, \mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \ldots$ bezeichnet werden. Eine Grösse x ist demnach eine „ganze algebraische Function“ gewisser Variabeln, wenn dieselbe einer irreductibeln Gleichung genügt, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich Eins ist, während die übrigen Coefficienten ganze rationale Functionen der unabhängigen Variabeln sind.

Aus der gegebenen Definition folgt unmittelbar, dass jede ganze algebraische Function die Eigenschaft hat, für endliche Werthe der unabhängigen Variabeln niemals unendlich werden zu können, sowie andererseits, dass jede algebraische Function, welche diese Eigenschaft hat, nothwendig eine *ganze* algebraische Function sein muss. Aus dieser charakteristischen Eigenschaft geht ferner hervor, dass jede ganze algebraische Function von ganzen algebraischen Functionen wiederum eine solche ist, sowie dass, wenn eine ganze algebraische Function von $\mathfrak{v}, \mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \ldots$ rational ist, dieselbe eine *ganze* rationale Function eben dieser Variabeln sein muss. Endlich sieht man leicht, dass man in gewisser Hinsicht von der Voraussetzung der Irreductibilität abstrahiren kann, welche in Bezug auf jene die ganze algebraische Function definirende Gleichung gemacht worden ist; denn eine Grösse x erweist sich schon dadurch als ganze algebraische Function von $\mathfrak{v}, \mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \ldots$, dass dieselbe irgend einer, wenn auch reductibeln, Gleichung $F(x) = 0$ genügt, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz von x gleich Eins ist, während die übrigen Coefficienten ganze rationale Functionen der Variabeln $\mathfrak{v}, \mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \ldots$ sind. Aber die definirende Gleichung

der Gleichung $F = 0$ ist, welche ich im Folgenden auch als „Discriminante der ganzen algebraischen Function x" bezeichnen will, so ergiebt die vorstehende Ausführung, „dass jede durch $x, v, v', \ldots$ rational ausdrückbare ganze algebraische Function der Variabeln v, multiplicirt mit der Discriminante von x, als *ganze* rationale Function von $x, v, v', \ldots$ dargestellt werden kann".

§ 2.

Wenn nunmehr x eine ganze algebraische, durch die Gleichung $F(x, v) = 0$ definirte Function einer einzigen Variabeln v, und $D(v)$ die Discriminante derselben bedeutet, so werden alle ganzen algebraischen Functionen von v, welche zugleich rationale Functionen von x und v sind, in der Form:

$$A_0(v) + A_1(v).x + A_2(v).x^2 + \cdots + A_{n-1}(v).x^{n-1}$$

enthalten sein, wenn auch für die Coefficienten $A_0(v)$, $A_1(v)$, ... nur solche rationale Functionen von v genommen werden, deren Nenner Theiler der Discriminante $D(v)$ sind. Man wähle nun unter denjenigen ganzen algebraischen Functionen, welche in dieser Form dargestellt in Bezug auf x vom m^{ten} Grade sind, eine solche aus, für die der Nenner der rationalen Function $A_m(v)$ von möglichst hohem Grade ist. Wird alsdann dieser Nenner mit $N_m(v)$, der Zähler mit $M(v)$ bezeichnet, so giebt es, da diese beiden Functionen ohne gemeinschaftlichen Factor vorausgesetzt werden, zwei ebenfalls ganze rationale Functionen $P(v)$ und $Q(v)$, für welche die Gleichung:

$$P(v).M(v) + Q(v).N_m(v) = 1$$

stattfindet. Demnach wird man, wenn die ganze algebraische Function $A_m(v).x^m + \cdots$ mit $P(v)$ multiplicirt und alsdann $Q(v).x^m$ dazu addirt wird, wiederum eine ganze algebraische Function erhalten, welche als ganze rationale Function von x dargestellt nur vom m^{ten} Grade, und in welcher der Coefficient von x^m gleich $\frac{1}{N_m(v)}$ ist. Bezeichnet man die auf diese Weise erhaltenen ganzen algebraischen Functionen für die verschiedenen Werthe des m von 1 bis $(n-1)$ mit:

$$f_1(x, v), \quad f_2(x, v), \quad \ldots \quad f_{n-1}(x, v)$$

und setzt der Gleichförmigkeit halber $1 = f_0(x, v)$, so soll das System der

Es folgt nämlich unmittelbar aus der Irreductibilität der Gleichung $F(x, v) = 0$, dass zwei Ausdrücke von der Form (I.) nur dann einander gleich sein können, wenn die Coefficienten beider mit einander übereinstimmen, d. h. wenn die Ausdrücke identisch sind.

Die Nenner $N_1(v)$, $N_2(v)$, ... $N_{n-1}(v)$, welche beziehungsweise in den Functionen $f_1(x, v)$, $f_2(x, v)$, ... $f_{n-1}(x, v)$ auftreten, lassen sich noch näher charakterisiren, wenn man sich jede dieser Functionen durch die vorhergehende ausgedrückt denkt. Da nämlich das Product $x.f_{m-1}(x, v)$ eine ganze algebraische Function von v und als ganze Function von x vom m^{ten} Grade ist, so muss es, ebenso wie oben $\varphi(x, v)$, auf die Form

$$R^{(m)}(v)f_m(x, v) + R_1^{(m)}(v)f_{m-1}(x, v) + \cdots + R_m^{(m)}(v)$$

gebracht werden können. Da nun hierin der Coefficient von x^m, wenn nach Potenzen von x entwickelt wird, $\frac{R^{(m)}(v)}{N_m(v)}$, aber in $x.f_{m-1}(x, v)$ offenbar $\frac{1}{N_{m-1}(v)}$ ist, so resultirt die Gleichung

$$N_m(v) = R^{(m)}(v) N_{m-1}(v),$$

und wenn nach einander $m = 1, 2, 3, \ldots$ genommen wird:

$$N_m(v) = R^{(1)}(v) R^{(2)}(v) \ldots R^{(m)}(v).$$

Bei der hier angegebenen Darstellung der Functionen f, nämlich:

$$f_m(x, v) = \frac{1}{R^{(m)}(v)}\left(x f_{m-1}(v) - R_1^{(m)}(v) f_{m-1}(x, v) - \cdots - R_m^{(m)}(v)\right),$$

ist offenbar auch die Annahme zulässig, dass jeder der Coefficienten $R_1^{(m)}(v)$, $R_2^{(m)}(v)$, ... $R_m^{(m)}(v)$ von niedrigerem Grade als der Nenner $R^{(m)}(v)$ sei; denn anderenfalls kann man statt der Coefficienten $R(v)$ im Zähler den bei der Division durch den Nenner $R^{(m)}(v)$ verbleibenden Rest setzen, ohne dass die hierdurch entstehende Function $f_m(x, v)$ eine derjenigen Eigenschaften verliert, durch welche dieselbe oben charakterisirt worden ist.

§ 3.

Bezeichnet man die n verschiedenen Wurzeln der irreductibeln Gleichung $F(x, v) = 0$, d. h. also die n verschiedenen Werthe der ganzen algebraischen Function x mit x_0, x_1, x_2, ... x_{n-1}, so ist die Determinante des Systems n^{ter} Ordnung:

$$\begin{matrix} f_0(x_0, v), & f_1(x_0, v), & f_2(x_0, v), & \dots & f_{n-1}(x_0, v) \\ f_0(x_1, v), & f_1(x_1, v), & f_2(x_1, v), & \dots & f_{n-1}(x_1, v) \\ f_0(x_2, v), & f_1(x_2, v), & f_2(x_2, v), & \dots & f_{n-1}(x_2, v) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_0(x_{n-1}, v), & f_1(x_{n-1}, v), & f_2(x_{n-1}, v), & \dots & f_{n-1}(x_{n-1}, v) \end{matrix}$$

eine alternirende Function der Grössen $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$ und zugleich eine *ganze* algebraische Function von v, also ist das Quadrat dieser Determinante eine ganze rationale Function von v und soll mit $\Delta(v)$ bezeichnet werden.

Nach demjenigen, was über die Bildungsweise der Functionen f vorausgesetzt worden, hat jede derselben die Form:

$$f_m(x, v) = \frac{1}{N_m(v)} \cdot x^m + R_1(v) \cdot x^{m-1} + \dots + R_m(v).$$

Die Determinante des aus den Functionen f gebildeten Systems, nämlich $\sqrt{\Delta(v)}$, ist demnach gleich dem reciproken Werthe des Products $N_1(v).N_2(v)\dots N_{n-1}(v)$, multiplicirt mit der Determinante des Systems:

$$\begin{matrix} 1, & x_0, & x_0^2, & \dots & x_0^{n-1} \\ 1, & x_1, & x_1^2, & \dots & x_1^{n-1} \\ 1, & x_2, & x_2^2, & \dots & x_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & x_{n-1}, & x_{n-1}^2, & \dots & x_{n-1}^{n-1}. \end{matrix}$$

Da aber das Quadrat dieser letzteren Determinante dem absoluten Werthe nach gleich der Discriminante der Gleichung $F=0$ ist, welche mit $D(v)$ bezeichnet worden ist, so hat man:

$$\pm D(v) = \Delta(v).(N_1(v).N_2(v)\dots N_{n-1}(v))^2,$$

woraus auch hervorgeht, dass $\Delta(v)$ nicht verschwinden kann.

Wenn nun $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_{n-1}(x)$ irgend welche rationalen Functionen von x und v bedeuten, die sich also sämmtlich auf die Form:

$$\varphi_m(x) = \Phi_{m,0}(v).f_0(x, v) + \Phi_{m,1}(v).f_1(x, v) + \dots + \Phi_{m,n-1}(v).f_{n-1}(x, v)$$

bringen lassen, so wird die Determinante des aus den n^2 Functionen $\varphi_k(x_i, v)$ gebildeten Systems gleich der Determinante des aus den rationalen Functionen $\Phi_{k,i}(v)$ gebildeten Systems, multiplicirt mit $\sqrt{\Delta(v)}$. Sind die Functionen φ sämmtlich *ganze* algebraische Functionen von v, so ist das Quadrat

der Determinante des durch $\varphi_k(x_i, v)$ repräsentirten Systems eine ganze rationale Function von v, welches mit $D_\varphi(v)$ bezeichnet werden möge. Alsdann sind ferner die rationalen Functionen $\Phi_{k,i}(v)$ sämmtlich ganz, und es ist also die betreffende Determinante eine ganze rationale Function $R(v)$. Man hat daher die Gleichung:

$$D_\varphi(v) = \Delta(v).(R(v))^2,$$

welche zeigt, dass das Quadrat der Determinante jedes durch $\varphi_k(x_i, v)$ repräsentirten Systems eine ganze rationale durch $\Delta(v)$ theilbare Function von v ist, wenn $\varphi_0(x, v)$, $\varphi_1(x, v)$, ... $\varphi_{n-1}(x, v)$ *ganze* algebraische Functionen von v bedeuten, und dass demnach eben dieses Quadrat der Determinante, wenn es von möglichst niedrigem Grade, aber nicht gleich Null sein soll, von $\Delta(v)$ sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann. Das Fundamentalsystem der Functionen f ergiebt daher die Determinante niedrigsten Grades, und umgekehrt hat, wie leicht zu sehen, jedes System von ganzen algebraischen Functionen φ, welches zu einer Determinante *desselben* Grades führt, für welches also $D_\varphi(v) = c.\Delta(v)$ ist, ebenfalls die charakteristische Eigenschaft eines Fundamentalsystems, dass sich jede ganze algebraische Function von v, welche durch x und v rational ausdrückbar ist, als lineare Function der n Grössen φ darstellen lässt, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von v sind.

Es sei nunmehr $\varphi_0(x, v) = 1$, ferner sei y irgend eine ganze algebraische Function n^{ter} Ordnung $\varphi_1(x, v)$, so dass $y_i = \varphi_1(x_i, v)$ ist, endlich setze man $y^k = \varphi_k(x, v)$, also $y_i^k = \varphi_k(x_i, v)$. Alsdann wird das Quadrat der Determinante des durch $\varphi_k(x_i, v)$ repräsentirten Systems, d. h. also $D_\varphi(v)$ gleich der Discriminante der Gleichung n^{ten} Grades $F_1(y, v) = 0$, durch welche die algebraische Function y definirt wird. Man hat also, wenn diese Discriminante mit $D_1(v)$ bezeichnet wird:

$$D_1(v) = \Delta(v).(R(v))^2,$$

während oben für die Discriminante von x die ähnliche Beziehung:

$$\pm D(v) = \Delta(v)(N_1(v).N_2(v)\dots N_{n-1}(v))^2$$

sich ergeben hatte. Es ist demnach $\Delta(v)$ nicht bloss ein Theiler der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$ sondern auch ein Theiler der Discriminanten aller derjenigen irreductibeln Gleichungen n^{ten} Grades, durch welche ganze algebraische Functionen von v definirt werden, die zugleich rationale Functionen von x und v sind. Ich nenne desshalb diesen Divisor

der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$ den „wesentlichen Theiler" derselben und bezeichne im Gegensatz dazu den übrigen Theil der Discriminante, welcher ein vollständiges Quadrat ist, als „ausserwesentlichen Theiler". Diese letztere Bezeichnung wird sich nämlich rechtfertigen, insofern gezeigt wird, dass eben *nur* der als wesentlicher Theiler bezeichnete Ausdruck $\Delta(v)$ gemeinsamer Divisor aller erwähnten Discriminanten, d. h. also der *grösste* gemeinschaftliche Factor derselben ist.

Wenn es im Folgenden nöthig werden wird, die einzelnen Linearfactoren des wesentlichen und ausserwesentlichen Theilers der Discriminante zu berücksichtigen, so werde ich dieselben kurzweg als „wesentliche" und resp. „ausserwesentliche Factoren" der Discriminante der algebraischen Function x bezeichnen. Es ist ferner zu erwähnen, dass im Vorhergehenden der wesentliche und ausserwesentliche Theiler der Discriminante nur abgesehen von einer Constanten erklärt und bestimmt worden ist. Für die vorliegende Untersuchung ist dies auch hinreichend, so lange x eben nur als algebraische Function der Variabeln v betrachtet und demnach von den in der Gleichung $F(x, v) = 0$ ausserdem noch vorkommenden und als constant bezeichneten Grössen abgesehen wird. Auf diesem Standpunkte, wo man die besondere Natur und Beschaffenheit, welche der algebraischen Function x durch die in der definirenden Gleichung enthaltenen Constanten gegeben wird, nicht in Rücksicht zieht, kann auch nur eine solche Unterscheidung zwischen den verschiedenen Theilern der Discriminante gewonnen werden, welche deren Linearfactoren in v betrifft. Desshalb ist es hier auch ganz gleichgültig, welche Bestimmung man über eine der Function $\Delta(v)$ hinzuzufügende Constante treffen möge. Aber es ist vortheilhaft, hierüber in irgend einer bestimmten Weise zu disponiren, um die folgenden Resultate einfacher präcisiren zu können. Aus diesem Grunde will ich annehmen, dass $\Delta(v)$ selbst, d. h. der wesentliche Theiler von $D(v)$ so bestimmt sei, dass der Coefficient der höchsten Potenz von v darin gleich $+1$ wird. Das oben erlangte Resultat lässt sich alsdann in folgender Form aussprechen:

> Der wesentliche Theiler der Discriminante einer mit x bezeichneten ganzen algebraischen Function von v ist, abgesehen von einer so eben bestimmten Constanten, gleich dem Quadrate der Determinante eines durch $f_k(x_i, v)$ repräsentirten Systems, wenn die Functionen $f_0(x, v)$, $f_1(x, v), \dots f_{n-1}(x, v)$ irgend eines der Fundamentalsysteme bilden;

und es kann dies als erste charakteristische Eigenschaft des wesentlichen

Theilers der Discriminante angesehen werden. Der ausserwesentliche Theiler derselben ist auch in Bezug auf seinen constanten Factor dadurch vollkommen definirt, dass das Product des wesentlichen und ausserwesentlichen Theilers genau gleich der Discriminante selber sein soll. Die erste Eigenschaft des letzteren aber, welche ebenfalls aus den obigen Ausführungen hervorgeht und eine für die Unterscheidung der beiden Theiler charakteristische Beziehung enthält, lässt sich dahin formuliren:

> Der ausserwesentliche Theiler der Discriminante einer ganzen algebraischen Function x ist stets das Quadrat einer ganzen rationalen Function der unabhängigen Variabeln v, und zwar ist derselbe gleich dem Quadrate der Determinante des Substitutionssystems, welches man erhält, wenn man die n ganzen algebraischen Functionen $1, x, x^2, \dots x^{n-1}$ linear durch die n Functionen eines Fundamentalsystems ausdrückt.

Es muss also andererseits das Substitutionssystem, vermittelst dessen die Functionen eines Fundamentalsystems als lineare Functionen von $1, x, x^2, \dots x^{n-1}$, d. h. als ganze rationale Functionen von x dargestellt werden, eine Determinante haben, deren Quadrat gleich dem reciproken Werthe des ausserwesentlichen Theilers ist. Wenn dieser nicht etwa eine Constante ist, so müssen also irgend welche der Elemente jenes Substitutionssystems gebrochene Functionen von v sein, und jeder einzelne ausserwesentliche Factor $(v-\alpha)$ muss in irgend welchem der Elemente als nothwendiger Nenner vorkommen. Für jeden ausserwesentlichen Factor $(v-\alpha)$ ist es desshalb eine zweite charakteristische Eigenschaft,

> dass ganze algebraische Functionen von v existiren, die sich nur als gebrochene rationale Functionen von x und v und zwar mit dem Nenner $(v-\alpha)$ darstellen lassen, oder mit anderen Worten, dass es ganze rationale Functionen von x und v giebt, welche in Bezug auf x höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und durch $(v-\alpha)$ nicht algebraisch theilbar sind, und welche dennoch, durch $(v-\alpha)$ dividirt, eine ganze algebraische Function von v ergeben.

Es ist hierbei zu bemerken, dass ein durch die erwähnte Eigenschaft als ausserwesentlicher Factor charakterisirter Linearfactor der Discriminante ausserdem zugleich in dem wesentlichen Theiler derselben enthalten sein kann. Endlich ist noch zu erwähnen, dass, wie aus der Bildung der Functionen f leicht zu ersehen ist, ein ausserwesentlicher Factor $(v-\alpha)$ mindestens

zur $2m^{\text{ten}}$ Potenz erhoben in der Discriminante enthalten sein muss, wenn es ganze algebraische Functionen von v giebt, die sich als ganze rationale Functionen $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades von x darstellen lassen, und zwar so, dass irgend eine der rationalen Functionen von v, welche die Coefficienten bilden, im Nenner den Factor $(v-\alpha)$ enthält.

§ 4.

In den vorstehenden Ausführungen ist nicht eigentlich von der Voraussetzung der Irreductibilität der Gleichung $F(x,v)=0$ Gebrauch gemacht worden. Nur insofern eine reductible Gleichung nicht *eine* sondern *mehrere algebraische Functionen zugleich* definirt, würden die obigen Resultate anders zu formuliren sein, wenn man für die zu Grunde gelegte Gleichung die Voraussetzung der Irreductibilität fallen lässt. Bedeutet $\bar{F}(x,v)=0$ eine *reductible* Gleichung r^{ten} Grades, in welcher der Coefficient von x^r gleich *Eins* ist, während die übrigen Coefficienten ganze rationale Functionen von v sind, so definirt diese Gleichung so viel ganze algebraische Functionen von v (nebst ihren conjugirten), als die Anzahl ihrer irreductibeln Factoren beträgt. Diese algebraischen Functionen sind sämmtlich von einander verschieden, sobald — wie vorausgesetzt werden soll — die Discriminante von $\bar{F}(x,v)=0$, welche mit $\bar{D}(v)$ bezeichnet werden möge, nicht verschwindet. Analog den Functionen

$$A_0(v)+A_1(v).x+A_2(v).x^2+\cdots+A_{n-1}(v).x^{n-1},$$

welche im § 2 den Ausgangspunkt bildeten, können Ausdrücke von der Form

$$\bar{A}_0(v)+\bar{A}_1(v).x+\bar{A}_2(v).x^2+\cdots+\bar{A}_{r-1}(v).x^{r-1}$$

nur dann algebraische Functionen von v darstellen, welche für *alle* durch die Gleichung $\bar{F}(x,v)=0$ definirten Werthe von x *ganz* sind, wenn die rationalen Functionen $\bar{A}(v)$ keine anderen Nenner als Theiler von $\bar{D}(v)$ enthalten. Dies geht aus den im § 1 gegebenen Entwickelungen unmittelbar hervor, wenn dabei von der Voraussetzung der Irreductibilität der zu Grunde gelegten Gleichung abgesehen wird. Hiernach lässt sich ganz ebenso wie im § 2 ein System von Functionen

$$\bar{f}_0(x,v),\quad \bar{f}_1(x,v),\quad \bar{f}_2(x,v),\quad \ldots\quad \bar{f}_{r-1}(x,v)$$

bilden, welche den dort mit $f(x,v)$ bezeichneten genau entsprechen und folgende Eigenschaften haben:

I. Sie sind sämmtlich ganze Functionen $(r-1)^{\text{ten}}$ Grades von x, welche als Coefficienten nur solche rationale Functionen von v haben, deren Nenner Theiler der Discriminante $\bar{D}(v)$ sind.

II. Sie stellen *ganze* algebraische Functionen von v dar, sobald für x *irgend eine* der verschiedenen durch die Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ definirten algebraischen Functionen von v gesetzt wird, so dass auch der Ausdruck

$$\bar{B}_0(v)\bar{f}_0(x, v) + \bar{B}_1(v)\bar{f}_1(x, v) + \bar{B}_2(v)\bar{f}_2(x, v) + \cdots + \bar{B}_{r-1}(v)\bar{f}_{r-1}(x, v),$$

in welchem $\bar{B}_0(v)$, $\bar{B}_1(v)$, ... $\bar{B}_{r-1}(v)$ ganze rationale Functionen von v bedeuten, für alle der Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ genügenden Werthe von x nur *ganze* algebraische Functionen von v darstellt.

III. Es lässt sich andererseits *jede* rationale Function von x und v, welche für *alle* durch $F(x, v) = 0$ definirten Functionen x algebraisch ganze Functionen von v ergiebt, durch die angegebene in $\bar{f}_0$, $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, ... $\bar{f}_{r-1}$ lineare Form darstellen, und zwar in *dem* Sinne, dass die darzustellende Function mit dieser Form für sämmtliche der Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ genügenden Werthe von x übereinstimmt.

Die zuletzt angeführte Eigenschaft des Systems der Functionen $\bar{f}$ charakterisirt dasselbe als ein Fundamentalsystem, und es folgt nunmehr ganz wie im § 3, dass das Quadrat der Determinante

$$|\bar{f}_i(x_k, v)| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots r-1),$$

in welcher x_0, x_1, ... x_{r-1} die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ bedeuten, eine ganze Function von v und zwar ein Theiler von $\bar{D}(v)$ ist. Bezeichnet man, wie im § 3, diesen Theiler der Discriminante der Gleichung $\bar{F}(x, v) = 0$ als den „wesentlichen", den anderen aber als den „ausserwesentlichen", so leuchtet ein, dass der letztere ein vollständiges Quadrat ist. Beide Theiler aber lassen sich aus den wesentlichen und ausserwesentlichen Theilern der Discriminanten der einzelnen Factoren von $\bar{F}(x, v)$ leicht zusammensetzen. Es ist nämlich, genau wie im § 3, zu zeigen, dass der wesentliche Theiler der Discriminante von $\bar{F}(x, v) = 0$ zugleich Theiler des Quadrates jeder Determinante

$$|g_i(x_k, v)| \qquad (i, k = 0, 1, \ldots r-1)$$

ist, wenn die r^2 Functionen $g_i(x_k, v)$ sämmtlich, d. h. für alle Werthe der Indices i und k ganze algebraische Functionen von v darstellen. Ist nun

$$\bar{F}(x, v) = \Phi(x, v) . \Psi(x, v),$$

wo Φ und Ψ ganze Functionen von x, beziehungsweise von den Graden m und n bedeuten, deren Coefficienten ganze Functionen sind, werden ferner mit

$$x_0, \quad x_1, \quad \ldots \quad x_{m-1} \quad \text{die Wurzeln von} \quad \Phi(x, v) = 0$$

und mit

$$x_m, \quad x_{m+1}, \quad \ldots \quad x_{r-1} \quad \text{die Wurzeln von} \quad \Psi(x, v) = 0$$

bezeichnet, und sind endlich

$$\varphi_0(x, v), \quad \varphi_1(x, v), \quad \ldots \quad \varphi_{m-1}(x, v),$$
$$\psi_0(x, v), \quad \psi_1(x, v), \quad \ldots \quad \psi_{n-1}(x, v)$$

(beziehungsweise für die Gleichungen $\Phi(x, v) = 0$, $\Psi(x, v) = 0$) Fundamentalsysteme im Sinne der obigen, auch für reductible Gleichungen geltenden Erklärung, so lassen sich rationale Functionen

$$g_0(x, v), \quad g_1(x, v), \quad g_2(x, v), \quad \ldots \quad g_{r-1}(x, v)$$

so bestimmen, dass

$$g_i(x_k, v) = \varphi_i(x_k, v)$$

wird, wenn beide Indices i und k kleiner als m sind, dass hingegen

$$g_i(x_k, v) = \psi_i(x_k, v)$$

wird, wenn beide Indices grösser als $m-1$ sind, und dass endlich

$$g_i(x_k, v) = 0$$

wird, wenn einer der beiden Indices kleiner als m ist, der andere aber nicht. In der That braucht man zu diesem Behufe nur zwei ganze Functionen von x mit Coefficienten, die rationale Functionen von v sind,

$$P(x, v), \quad Q(x, v)$$

so zu wählen, dass

$$P(x, v)\Phi(x, v) + Q(x, v)\Psi(x, v) = 1$$

wird, und alsdann für $h = 0, 1, \ldots m-1$

$$g_h(x, v) = \varphi_h(x, v) Q(x, v) \Psi(x, v),$$

aber für $i = m, m+1, \ldots r-1$

$$g_i(x, v) = \psi_i(x, v) P(x, v) \Phi(x, v)$$

zu setzen. Das Quadrat der aus diesen r^2 Functionen $g_i(x_k, v)$ gebildeten Determinante, welches nach einer bereits oben gemachten Bemerkung den wesentlichen Theiler der Discriminante von $\bar{F}(x,v)=0$ als Theiler enthalten muss, ist offenbar gleich dem Quadrate des Productes der beiden aus den m^2 Elementen φ und den n^2 Elementen ψ gebildeten Determinanten, d. h. gleich dem Producte der wesentlichen Theiler der Discriminanten von $\Phi(x,v)$ und $\Psi(x,v)$. Es muss daher das Product der wesentlichen Theiler der Discriminanten von $\Phi(x,v)$ und $\Psi(x,v)$ durch den wesentlichen Theiler der Discriminante des Productes $\Phi(x,v).\Psi(x,v)$ theilbar sein. Andererseits lässt sich aber zeigen, dass der wesentliche Theiler der Discriminante von $\bar{F}(x,v)$ durch das Product derjenigen von $\Phi(x,v)$ und $\Psi(x,v)$ theilbar sein muss. Denn die mit $\bar{f}_i(x,v)$ bezeichneten Functionen des Fundamentalsystems für $\bar{F}(x,v)=0$ lassen sich als homogene ganze lineare Functionen der r Elemente $g_0(x,v)$, $g_1(x,v)$, $\dots$ $g_{r-1}(x,v)$ so darstellen, dass die Coefficienten ganze rationale Functionen von v sind, da die Gleichung

$$f_i(x,\ v) \;=\; C_{0i}(v)g_0(x,\ v)+C_{1i}(v)g_1(x,\ v)+\cdots+C_{r-1,i}(v)g_{r-1}(x,\ v)$$

offenbar für alle r Werthe $x=x_0,\ x_1,\ \dots\ x_{r-1}$ erfüllt ist, wenn die Coefficienten C so bestimmt werden, dass für die ersten m Werthe von x

$$f_i(x,\ v) \;=\; C_{0i}(v)\varphi_0(x,\ v)+C_{1i}(v)\varphi_1(x,\ v)+\cdots+C_{m-1,i}(v)\varphi_{m-1}(x,\ v),$$

für die folgenden n Werthe aber

$$f_i(x,\ v) \;=\; C_{mi}(v)\psi_0(x,\ v)+C_{m+1,i}(v)\psi_1(x,\ v)+\cdots+C_{r-1,i}(v)\psi_{n-1}(x,\ v)$$

wird. Das gewonnene Resultat lässt sich daher, wenn der constante Factor des wesentlichen Theilers in der oben angegebenen Weise bestimmt wird, folgendermassen formuliren:

> „Der wesentliche Theiler der Discriminante einer reductibeln Gleichung ist gleich dem aus den wesentlichen Theilern der Discriminanten ihrer Factoren gebildeten Producte."

Ueber den ausserwesentlichen Theiler der Discriminante einer reductibeln Gleichung mag hier nur bemerkt werden, dass derselbe stets durch das Quadrat der Eliminations-Resultante ihrer Factoren theilbar ist. Wenn nämlich wie oben $\bar{F}(x,v)=\Phi(x,v).\Psi(x,v)$ angenommen und die Discriminante von $\bar{F}(x,v)$ mit $\bar{D}(v)$ bezeichnet wird, so findet die Gleichung

$$\bar{D}(v) \;=\; D_1(v).D_2(v).R(v)^2$$

statt, in welcher $D_1(v)$, $D_2(v)$, $R(v)$ beziehungsweise die Resultanten der Elimination von x aus

$$\Phi(x, v) = 0, \quad \frac{\partial \Phi(x, v)}{\partial x} = 0,$$
$$\Psi(x, v) = 0, \quad \frac{\partial \Psi(x, v)}{\partial x} = 0,$$
$$\Phi(x, v) = 0, \quad \Psi(x, v) = 0$$

bedeuten. Da nun $D_1(v)$, $D_2(v)$ beziehungsweise die Discriminanten von $\Phi(v)$ und $\Psi(v)$ sind, und da der wesentliche Theiler von $\bar{D}(v)$ nur gleich dem Producte der wesentlichen Theiler von $D_1(v)$ und $D_2(v)$ ist, so muss der Factor $R(v)^2$, d. h. das Quadrat der Eliminations-Resultante von $\Phi(x, v) = 0$ und $\Psi(x, v) = 0$ in der That als Theiler im ausserwesentlichen Theiler der Discriminante $\bar{D}(v)$ enthalten sein.

§ 5.

Versteht man unter $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ unbestimmte Grössen und setzt

$$z_k = w_0 . f_0(x_k, v) + w_1 . f_1(x_k, v) + \cdots + w_{n-1} . f_{n-1}(x_k, v),$$

so genügen $z_0, z_1, \ldots z_{n-1}$ einer irreductibeln Gleichung n^{ten} Grades, in welcher der Coefficient von x^n gleich Eins ist, während die übrigen Coefficienten ganze rationale Functionen von $v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ sind. Wenn die Discriminante dieser Gleichung mit D_z bezeichnet wird, so ist also auch D_z eine ganze rationale Function von v und den n Unbestimmten w, und nach dem, was im vorigen Paragraphen bewiesen worden, durch den wesentlichen Theiler der Discriminante von x, d. h. durch $\Delta(v)$ theilbar, da z_k eine *ganze* algebraische Function von v ist. Die Discriminante D_z enthält also einen von den Grössen w unabhängigen Factor, d. h. wenn D_z nach den verschiedenen Potenzen von $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ entwickelt gedacht wird, so enthalten sämmtliche Coefficienten der verschiedenen Terme von der Form $w_0^a . w_1^b \ldots w_{n-1}^m$ einen grössten gemeinsamen Factor, der eine ganze rationale Function von v und jedenfalls durch $\Delta(v)$ theilbar ist. Wird dieser grösste gemeinschaftliche Factor mit $\Delta_1(v)$ bezeichnet, so dass also:

$$D_z = \Delta_1(v) . V(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$$

ist, so muss, da D_z durch $\Delta(v)$ dividirt als Quotienten das vollständige Quadrat einer ganzen rationalen Function von v ergeben soll, sowohl $\frac{\Delta_1(v)}{\Delta(v)}$

als $V(v, w_0, \ldots)$ ein vollständiges Quadrat sein. Es wird desshalb:

$$D_z = \Delta(v).(\delta(v))^2.(W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1}))^2$$

sein, wo $\delta(v)$ eine ganze rationale Function von v allein und W eine ganze rationale Function von v und den Grössen w bedeutet, welche keinen von den letzteren unabhängigen Factor mehr enthält. Dass nämlich W nicht nur in Bezug auf v sondern auch in Bezug auf $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ ganz und rational ist, geht unmittelbar daraus hervor, dass $\delta(v).W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$, abgesehen von einem in Rücksicht auf $v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ constanten Factor, gleich der Determinante des Substitutionssystems ist, vermittelst dessen $1, z, z^2, \ldots z^{n-1}$ linear durch die Functionen f ausgedrückt werden. Nach der oben angenommenen Ausdrucksweise ist daher $\Delta(v)$ der wesentliche, $\delta(v)^2.W^2$ aber der ausserwesentliche Theiler der Discriminante D_z und jeder Factor von $\delta(v)$ ein ausserwesentlicher Factor derselben. Wenn nun $(v-\alpha)$ einer dieser Factoren und also α eine Constante, d. h. eine von v und $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ unabhängige Grösse ist, so muss es — auf Grund der zweiten Eigenschaft der ausserwesentlichen Factoren — ganze rationale Functionen von z und v geben, welche in Bezug auf z höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und durch $(v-\alpha)$ nicht theilbar sind, und welche dennoch, durch $(v-\alpha)$ dividirt, algebraisch ganz bleiben. Es sei nun $\psi(z)$ eine derjenigen Functionen dieser Art, welche von möglichst niedrigem Grade in Bezug auf z sind. Dann ist also $\psi(z) = \psi_m.z^m + \psi_{m-1}.z^{m-1} + \cdots + \psi_0$, wo die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von z ganze rationale Functionen von $v, w_0, w_1, \ldots w_n$ und nicht sämmtlich durch $(v-\alpha)$ theilbar sind; es ist ferner $m < n$, $\frac{\psi(z)}{v-\alpha}$ eine ganze algebraische Function von v und endlich ψ_m nicht durch $(v-\alpha)$ theilbar, da sonst entgegen der gemachten Voraussetzung eine ganze rationale Function $\psi_{m-1}z^{m-1} + \cdots + \psi_0$ existirte, welche dieselben Eigenschaften wie $\psi(z)$ hätte. Bedeutet nun y eine unbestimmte Grösse, so ist auch $yz - \frac{\psi(z)}{v-\alpha}$ eine ganze algebraische Function von v, welche sich, wie z selbst, mit Hülfe von x rational darstellen lässt. Dieselbe kann daher als lineare Function von $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ ausgedrückt, d. h. in die Form:

$$yz - \frac{\psi(z)}{v-\alpha} = u_0.f_0(x, v) + u_1.f_1(x, v) + \cdots + u_{n-1}.f_{n-1}(x, v)$$

gesetzt werden, in welcher die Coefficienten u ganze rationale Functionen von $v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ und y bedeuten. Die Discriminante von $yz - \frac{\psi(z)}{v-\alpha}$

ist nun offenbar nach der obigen Bezeichnungsweise gleich:

$$\Delta(v).\delta(v)^2.\,W(v,\ u_0,\ u_1,\ \dots\ u_{n-1})^2,$$

d. h. gleich dem Ausdrucke, den man erhält, wenn man in der obigen Darstellung der Discriminante von z die unbestimmten Grössen w durch die Grössen u ersetzt. Andererseits wird aber die Discriminante von $yz-\frac{\psi(z)}{v-\alpha}$, abgesehen vom Vorzeichen, durch das Product:

$$\Pi\Big(y(z_k-z_i)-\frac{\psi(z_k)-\psi(z_i)}{v-\alpha}\Big)^2$$

oder

$$\Pi(z_k-z_i)^2.\,\Pi\Big(y-\frac{\psi(z_k)-\psi(z_i)}{(v-\alpha)(z_k-z_i)}\Big)^2$$

dargestellt, wenn man darin den Indices k und i sämmtliche Werthe beilegt, bei welchen $k>i$ ist. Da nun das Product $\Pi(z_k-z_i)^2$ bei richtiger Bestimmung des Vorzeichens die Discriminante von z, welche mit D_z bezeichnet wurde, ausdrückt, so hat man:

$$\Delta(v).\delta(v)^2.(W(v,\ u_0,\ u_1,\ \dots\ u_{n-1}))^2 = D_z.\,\Pi\Big(y-\frac{\psi(z_k)-\psi(z_i)}{(v-\alpha)(z_k-z_i)}\Big)^2,$$

oder indem man den oben angegebenen Werth von D_z einsetzt, alsdann den gemeinsamen Factor $\Delta(v).\delta(v)^2$ auf beiden Seiten der Gleichung weglässt und endlich die Quadratwurzel nimmt:

$$\pm W(v,\ u_0,\ u_1,\ \dots\ u_{n-1}) = W(v,\ w_0,\ w_1,\ \dots\ w_{n-1}).\,\Pi\Big(y-\frac{\psi(z_k)-\psi(z_i)}{(v-\alpha)(z_k-z_i)}\Big).$$

Nach der über die Function $W(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1})$ gemachten Voraussetzung, dass sie keinen von den Grössen w unabhängigen Factor enthalte, kann dieselbe nicht durch $(v-\alpha)$ theilbar sein, also für $v=\alpha$ nicht verschwinden. Es muss also, ebenso wie die linke Seite jener Gleichung, auch der zweite Factor auf der rechten Seite, nämlich das Product:

$$\Psi(y) = \Pi\Big(y-\frac{\psi(z_k)-\psi(z_i)}{(v-\alpha)(z_k-z_i)}\Big)$$

für $v=\alpha$ endlich bleiben, und da dasselbe überdies offenbar für alle anderen Werthe von v endlich und in Beziehung auf v rational ist, so muss es eine ganze rationale Function von v, also überhaupt eine ganze rationale Function von $v,\ w_0,\ w_1,\ \dots\ w_{n-1}$ und y sein. Da ferner der Coefficient der höchsten Potenz von y in $\Psi(y)$ gleich Eins ist, so stellt $\Psi(y)=0$ eine Gleichung dar, deren Wurzeln sämmtlich ganze algebraische Functionen von v sind,

d. h. es muss

$$\frac{1}{v-\alpha}\cdot\frac{\psi(z_k)-\psi(z_i)}{z_k-z_i}$$

für alle von einander verschiedenen Werthe der Indices k und i eine ganze algebraische Function von v sein. Wenn dies aber wirklich der Fall wäre, so müsste auch

$$\frac{1}{v-\alpha}\cdot\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{\psi(z_0)-\psi(z_i)}{z_0-z_i}$$

oder der damit übereinstimmende Ausdruck

$$-\frac{\psi'(z_0)}{v-\alpha}+\frac{1}{v-\alpha}\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{\psi(z_0)-\psi(z_i)}{z_0-z_i}$$

eine ganze algebraische Function darstellen. Da aber

$$\psi(z)=\psi_m z^m+\psi_{m-1}z^{m-1}+\cdots+\psi_0$$

ist, so erhält dieser Ausdruck die Form

$$\frac{1}{v-\alpha}\Big((n-m)\psi_m\,.\,z_0^{m-1}+\big(\psi_m\sum_{i=0}^{i=n-1}z_i+(n-m+1)\psi_{m-1}\big)z_0^{m-2}+\cdots\Big),$$

aus welcher man ersieht, dass derselbe keine ganze algebraische Function darstellen kann. Denn es würde dies, weil jener Ausdruck in Bezug auf z vom $(m-1)^{\text{ten}}$ Grade und der Coefficient von z^{m-1} nicht durch $(v-\alpha)$ theilbar ist, den Bedingungen widersprechen, welche für die Wahl von $\psi(z)$ festgesetzt worden sind. Es zeigt sich also durch diesen Widerspruch, dass jene Bedingungen unerfüllbar sind, dass demnach keine Function $\psi(z)$ und desshalb auch kein ausserwesentlicher Factor $(v-\alpha)$, d. h. kein Factor von $\delta(v)$ existiren kann, dass also $\delta(v)$ selbst sich auf eine von v unabhängige Constante reduciren muss. Da nun diese Constante mit der Function W vereinigt werden kann, so haben wir schliesslich für die Discriminante der durch den Ausdruck:

$$w_0 f_0(x,v)+w_1 f_1(x,v)+\cdots+w_{n-1}f_{n-1}(x,v)$$

dargestellten ganzen algebraischen Function z die Gleichung:

$$D_z = \Delta(v).(W(v,\ w_0,\ w_1,\ \ldots\ w_{n-1}))^2,$$

in welcher W eine ganze rationale Function von v, w_0, w_1, $\ldots$ w_{n-1} bedeutet, die keinen von den Grössen w unabhängigen Factor $(v-\alpha)$ enthält.

Die so eben angeführte Eigenschaft der Function W macht es offenbar möglich, für die bisher unbestimmt gebliebenen Grössen w derartige ganze rationale Functionen von v zu wählen, dass $W(v, w_0, w_1, \ldots w_{n-1})$ irgend welche gegebenen Factoren $(v-\alpha)$, $(v-\alpha')$, $\ldots$ *nicht* enthält. In der

That lassen sich z. B. immer constante, d. h. von v unabhängige Werthe für die Grössen w finden, durch welche der erwähnten Bedingung Genüge geleistet wird, da hierzu nur erforderlich ist, die Grössen w so zu bestimmen, dass die Gleichung:

$$W(\alpha, w_0, w_1, \dots w_{n-1}).\, W(\alpha', w_0, w_1, \dots w_{n-1}) \cdots = 0$$

nicht befriedigt werde. Dies ist aber stets möglich, weil diese Gleichung — wie bewiesen worden ist — durch unbestimmte Grössen w, d. h. also identisch niemals erfüllt ist, welche Werthe auch α, α', ... haben mögen. Denkt man sich nun namentlich die Grössen $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ so bestimmt, dass die Function W keinen ausserwesentlichen Factor der Discriminante von x enthält, so wird die Discriminante der ganzen algebraischen Function

$$w_0 f_0(x, v) + w_1 f_1(x, v) + \cdots + w_{n-1} f_{n-1}(x, v)$$

mit der Discriminante von x *nur* den Factor $\varDelta(v)$ gemein haben. Wir haben hiermit für den *wesentlichen* Theiler der Discriminante einer ganzen algebraischen Function x die zweite Eigenschaft erlangt,

> dass derselbe der grösste gemeinschaftliche Theiler der Discriminanten aller derjenigen ganzen algebraischen Functionen n^{ter} Ordnung ist, welche sich durch x und v rational ausdrücken lassen.

Der *ausserwesentliche* Theiler ist dagegen im Allgemeinen für alle diese algebraischen Functionen verschieden und erhält für jede derselben den Werth $W(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1})^2$, wenn man darin für $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ solche ganzen rationalen Functionen von v setzt, dass die betreffende algebraische Function durch den Ausdruck $w_0 f_0 + w_1 f_1 + \cdots + w_{n-1} f_{n-1}$ dargestellt wird. Bezeichnet man ferner diesen Ausdruck für unbestimmte Grössen w wie oben mit z, so ist vermöge der oben erwähnten ersten Eigenschaft des ausserwesentlichen Theilers jede der Functionen $f_0, f_1, \dots f_{n-1}$, also auch jede andere durch x rational ausdrückbare ganze algebraische Function von v, als ganze rationale Function von z, v und $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$, dividirt durch $W(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1})$ darzustellen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, dass $W(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1})$ keine von v unabhängige ganze Function der Grössen w als Theiler enthalten kann, sobald $n > 2$ ist. Wäre dies nämlich der Fall, so würde wenigstens einer der in Beziehung auf die Grössen w linearen Factoren von W

$$w_0(f_0(x_i, v) - f_0(x_k, v)) + w_1(f_1(x_i, v) - f_1(x_k, v)) + \cdots$$
$$\cdots + w_{n-1}(f_{n-1}(x_i, v) - f_{n-1}(x_k, v))$$

einen von v unabhängigen Factor haben müssen, d. h. es müsste dieser Ausdruck, dividirt durch einen der Coefficienten von $w_0, w_1, \dots$ oder w_{n-1}, von v unabhängig sein. Haben nun die Functionen f dieselbe Bedeutung wie oben, so dass $f_0 = 1$ und $f_m(x, v)$ in Beziehung auf x vom m^{ten} Grade ist, so wird jener Ausdruck, abgesehen von dem Factor $\frac{x_i - x_k}{N_1(v)}$, gleich:

$$w_1 + w_2(\varphi_0 + \varphi_1(x_i + x_k)) + w_3(\psi_0 + \psi_1(x_i + x_k) + \psi_2(x_i^2 + x_i x_k + x_k^2)) + \cdots,$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ rationale Functionen von v bedeuten. Damit alle Coefficienten der verschiedenen Grössen w von v unabhängig seien, müssten daher die symmetrischen Functionen von x_i und x_k rationale Functionen von v sein, d. h. $F(x, v)$ müsste, als Function von x allein betrachtet, einen in v rationalen Factor zweiten Grades enthalten, und dies widerspricht für den Fall $n > 2$ der Voraussetzung, dass die Gleichung $F(x, v) = 0$ irreductibel sei.

§ 6.

Die Function $W(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1})$ hat, als ganze rationale Function von v betrachtet, mit ihrer nach v genommenen Ableitung $W'(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1})$ keinen Factor gemein, so lange nämlich $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ noch unbestimmte Grössen bedeuten. Denn wenn man sich W als ganze rationale Function aller darin enthaltenen Grössen in ihre irreductibeln Factoren zerlegt denkt, d. h. in solche, die nicht wiederum ganze rationale Functionen von v und den Grössen w zu Theilern haben, so kann nach dem Inhalt des vorigen Paragraphen keiner derselben von den Grössen w unabhängig sein. Bedeutet nun $U(v, w_0, w_1, \dots w_{n-1})$ irgend einen dieser irreductibeln Factoren, mit dem W' einen gemeinsamen Factor haben soll, so muss der grösste gemeinsame Theiler von W' und U eine ganze rationale Function von v und den Grössen w, also wegen der Irreductibilität der Function U eben diese selbst sein. Da also, wenn W ausser U noch den Factor V enthält, so dass:

$$W = U.V, \quad W' = U'V + V'U$$

zu setzen ist, das Product $U'V$ durch U theilbar sein muss und U' wegen der Irreductibilität von U keinen Factor mit U gemein haben kann, so muss nothwendig V noch den Factor U enthalten, d. h. W muss durch U^2 theilbar sein. Diese Theilbarkeit bezieht sich zwar zuvörderst nur auf die Variable v, in dem Sinne, dass W durch U^2 dividirt als Quotienten eine

ganze rationale Function von v ergiebt; aber da U auch in Bezug auf die Grössen w irreductibel angenommen worden, so ist leicht zu sehen, dass jener Quotient zugleich eine ganze rationale Function von $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ sein muss. Bezeichnet man denselben mit Q, so dass $W = U^2.Q$ ist, so hat sich also gezeigt, dass, wenn W und $\frac{\partial W}{\partial v}$ einen gemeinsamen Factor U hätten, derselbe auch in $\frac{\partial W}{\partial w_0}, \frac{\partial W}{\partial w_1}, \dots \frac{\partial W}{\partial w_{n-1}}$ enthalten wäre. Unter dieser Annahme müsste daher, weil

$$W.\sqrt{\Delta(v)} = \pm \Pi \{w_0(f_0(x_k)-f_0(x_i)) + w_1(f_1(x_k)-f_1(x_i)) + \cdots$$
$$\cdots + w_{n-1}(f_{n-1}(x_k)-f_{n-1}(x_i))\}$$

ist, irgend einer der in Beziehung auf die Grössen w linearen Factoren dieses Productes einem anderen gleich sein, oder doch nur durch einen von den Grössen w unabhängigen Factor sich von demselben unterscheiden. Die Functionen $f_0, f_1, f_2, \dots$ sind aber resp. ganze Functionen des nullten, ersten, zweiten etc. Grades von x, also von der Form:

$$f_1 = a + a_1 x, \quad f_2 = b + b_1 x + b_2 x^2, \quad f_3 = c + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

wo die Coefficienten $a, a_1, b, \dots$ rationale Functionen von v bedeuten. Soll nun derjenige Factor jenes Productes, welcher die Indices k und i enthält, nach Multiplication desselben mit einer von $w_0, w_1, \dots$ unabhängigen Grösse λ, gleich demjenigen Factor sein, welcher die Indices r und s enthält, so bekommt man durch Vergleichung der verschiedenen Coefficienten der einzelnen Unbestimmten w die Bedingungen:

$$\lambda a_1(x_k - x_i) = a_1(x_r - x_s), \quad \lambda b_2(x_k^2 - x_i^2) + \lambda b_1(x_k - x_i) = b_2(x_r^2 - x_s^2) + b_1(x_r - x_s),$$
$$\lambda c_3(x_k^3 - x_i^3) + \lambda c_2(x_k^2 - x_i^2) + \lambda c_1(x_k - x_i) = c_3(x_r^3 - x_s^3) + c_2(x_r^2 - x_s^2) + c_1(x_r - x_s),$$

und aus diesen ergeben sich leicht, wenn man berücksichtigt, dass a_1, b_2, c_3, jedenfalls von Null verschieden sind, die einfacheren Relationen:

$$x_k + x_i = x_r + x_s \quad \text{und} \quad x_k^2 + x_k x_i + x_i^2 = x_r^2 + x_r x_s + x_s^2.$$

Hieraus folgt durch Elimination von x_s die Bedingung: $(x_k - x_r)(x_i - x_r) = 0$, welche offenbar nicht erfüllt ist, und es hat sich daher die Annahme, dass W und W' einen gemeinsamen Factor haben, als unmöglich erwiesen.

Da nun W und W', so lange die Grössen w unbestimmt sind, keinen gemeinsamen Factor in v haben, so lassen sich auch specielle Werthe, d. h. specielle ganze rationale Functionen von v für $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ setzen, für

welche jene Eigenschaft bestehen bleibt. Denn wenn man sich in W und W' für $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ ganze rationale Functionen von v irgend eines beliebigen Grades mit noch unbestimmten Coefficienten gesetzt und dann die durch Elimination von v aus W und W' entstehende Gleichung gebildet denkt, so kann dieselbe nach dem oben Ausgeführten nicht identisch, d. h. für beliebige Werthe jener unbestimmten Coefficienten befriedigt werden; diese Coefficienten können also stets so gewählt werden, dass eben jene Eliminationsgleichung *nicht* erfüllt wird. Man sieht hieraus auch, dass es stets von v unabhängige, constante Werthe $c_0, c_1, \ldots c_{n-1}$ giebt, für welche $W(v, c_0, c_1, \ldots c_{n-1})$ und $W'(v, c_0, c_1, \ldots c_{n-1})$ keinen gemeinsamen Factor haben.

Wählt man dem Inhalte dieses und des vorigen Paragraphen gemäss für $w_0, w_1, \ldots w_{n-1}$ irgend welche Werthe $w'_0, w'_1, \ldots w'_{n-1}$, welche die Eigenschaft haben, dass $W(v, w'_0, w'_1, \ldots w'_{n-1})$ weder mit $W'(v, w'_0, w'_1, \ldots w'_{n-1})$ noch mit $\Delta(v)$ einen Factor gemein hat, so wird

$$\xi = w'_0 . f_0(x, v) + w'_1 f_1(x, v) + \cdots + w'_{n-1} f_{n-1}(x, v)$$

eine ganze algebraische Function von v, für welche die Quadratwurzel des ausserwesentlichen Theilers der Discriminante eine ganze rationale Function von v ist, deren lineare Factoren sämmtlich sowohl unter einander als von denen des wesentlichen Theilers verschieden sind.

Hierbei könnte die Bestimmung der für $w'_0, w'_1, \ldots w'_{n-1}$ zu nehmenden Werthe noch weiter dahin beschränkt werden, dass der ausserwesentliche Theiler von möglichst niedrigem Grade wird, aber es soll im Folgenden, wenn von der algebraischen Function ξ die Rede ist, ein derartiger besonderer Charakter derselben nicht vorausgesetzt werden. Die obigen Bestimmungen allein genügen, wie aus den bisherigen Ausführungen hervorgeht, dafür,

> dass jede durch x rational ausdrückbare ganze algebraische Function von v sich als ganze rationale Function von ξ darstellen lasse, deren in v rationale Coefficienten in ihren Nennern nur Linearfactoren enthalten, welche sowohl unter einander als von denen des wesentlichen Theilers der Discriminante verschieden sind;

und man kann hierbei unter dem Ausdruck „Discriminante" ebensowohl die von x als die von ξ verstehen, weil der wesentliche Theiler für beide identisch ist.

§ 7.

Mit Hülfe der erlangten Resultate kann nunmehr die Unterscheidung zwischen wesentlichem und ausserwesentlichem Theiler auf die Discriminante von Gleichungen ausgedehnt werden, in welchen der erste Coefficient ***nicht*** gleich Eins ist. Wenn nämlich unter $\psi_0, \psi_1, \ldots \psi_n$ ganze rationale Functionen von v verstanden werden, welche nicht sämmtlich einen gemeinsamen Factor haben, und wenn ferner

$$\Psi(y, v) = \psi_n y^n + \psi_{n-1} y^{n-1} + \cdots + \psi_1 y + \psi_0$$

gesetzt wird, so will ich jene ganze Function, welche gewöhnlich als „Discriminante" der in Beziehung auf X und Y homogenen Function:

$$\psi_n Y^n + \psi_{n-1} Y^{n-1} X + \cdots + \psi_1 Y X^{n-1} + \psi_0 X^n$$

bezeichnet wird, die Discriminante der Gleichung $\Psi(y, v) = 0$ oder auch, vorausgesetzt, dass $\Psi(y, v)$ irreductibel ist, die Discriminante der durch dieselbe Gleichung definirten algebraischen Function y nennen. — Bedeutet nun $\theta(v)$ eben diese Discriminante und Ψ' die Ableitung von Ψ nach y, so ist bekanntlich:

$$\theta(v) = \psi_n^{n-2}.\Psi'(y_0, v).\Psi'(y_1, v)\ldots\Psi'(y_{n-1}, v),$$

wenn unter $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ die verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\Psi(y, v) = 0$ verstanden werden. Die Discriminante $\theta(v)$ bleibt offenbar ungeändert, wenn man y durch $y + r$ ersetzt; das letzte Glied in der Entwickelung von $\Psi(y + r)$ wird aber alsdann gleich $\Psi(r)$, also gleich einer ganzen rationalen Function von v, die für beliebige Werthe der Constanten r keinen gemeinsamen Factor mit ψ_n hat. Man kann daher der Grösse r auch einen ***speciellen*** Werth beilegen, für welchen diese Eigenschaft von $\Psi(y + r)$ bestehen bleibt und desshalb unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, dass für $\Psi(y)$ selbst eben diese Bedingung schon erfüllt sei, d. h. dass ψ_n und ψ_0 keinen gemeinsamen Factor haben.

Setzt man $x = \psi_n . y$ und:

$$F(x, v) = x^n + \psi_{n-1}.x^{n-1} + \psi_n.\psi_{n-2}.x^{n-2} + \cdots + \psi_n^{n-2}.\psi_1 x + \psi_n^{n-1}.\psi_0,$$

so wird x als ganze algebraische Function von v durch die Gleichung $F(x, v) = 0$ bestimmt, wenn y diejenige algebraische Function ist, welche durch die Gleichung $\Psi(y, v) = 0$ definirt und welche daher, sobald ψ_n sich nicht auf eine Constante reducirt, ***nicht*** ganz ist. Man hat ferner:

$$F(x, v) = \psi_n^{n-1}.\Psi(y, v), \quad F'(x, v) = \psi_n^{n-2}.\Psi'(y, v),$$

also, wenn, wie oben, die Discriminante von x mit $D(v)$ bezeichnet wird:

$$D(v) = \psi_n^{n^2-3n+2} . \theta(v).$$

Es soll nunmehr gezeigt werden, dass der Factor von $\theta(v)$, nämlich $\psi_n^{(n-1)(n-2)}$, als Factor in dem *ausserwesentlichen* Theiler der Discriminante $D(v)$ enthalten ist, und ich werde zu diesem Zwecke zuvörderst nachweisen, dass für jede Zahl m von 1 bis $(n-1)$ der Ausdruck:

$$\frac{\psi_0^{n-m}}{\psi_n^{m-1}} \cdot (x^m + \psi_{n-1} . x^{m-1} + \psi_n . \psi_{n-2} x^{m-2} + \cdots + \psi_n^{m-2} . \psi_{n-m+1} . x)$$

eine *ganze* algebraische Function von v darstellt. Wenn man nämlich der Kürze halber diesen Ausdruck mit $\varphi_m(x)$ und $\frac{\psi_n . \psi_0}{x}$ mit η bezeichnet, so ist vermöge der Gleichung $F(x, v) = 0$:

$$-\varphi_m(x) = \psi_0^{n-m} . \psi_{n-m} + \psi_0^{n-m-1} . \psi_{n-m-1} . \eta + \psi_0^{n-m-2} . \psi_{n-m-2} . \eta^2 + \cdots$$
$$\cdots + \psi_0 \psi_1 \eta^{n-m-1} + \psi_0 . \eta^{n-m}.$$

Ferner hat man, da $\eta = \frac{\psi_0}{y}$ ist, vermöge der Gleichung $\Psi(y, v) = 0$:

$$\eta^n + \psi_1 \eta^{n-1} + \psi_2 \psi_0 \eta^{n-2} + \psi_3 \psi_0^2 \eta^{n-3} + \cdots + \psi_{n-1} \psi_0^{n-2} \eta + \psi_n \psi_0^{n-1} = 0.$$

Durch diese Gleichung wird offenbar η als *ganze* algebraische Function von v definirt, und da in der vorhergehenden Gleichung $\varphi_m(x)$ als ganze rationale Function von η und v dargestellt worden ist, so ist auch $\varphi_m(x)$ als *ganze* algebraische Function von v erwiesen. — Die Determinante des Substitutionssystems, durch welches die n Grössen $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ als eben so viele lineare Functionen der n Grössen $1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-1}(x)$ dargestellt werden, ist offenbar gleich Eins, dividirt durch das Product der Coefficienten der höchsten Potenzen von x in den verschiedenen n Functionen φ, d. h. also gleich:

$$\frac{\psi_n^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}{\psi_0^{\frac{1}{2}n(n-1)}}.$$

Nennt man nun $\partial(v)$ die Determinante desjenigen Substitutionssystems, mit Hülfe dessen die n Grössen $1, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots \varphi_{n-1}(x)$ linear durch die Functionen des Fundamentalsystems $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ ausgedrückt werden, so ist

$$\frac{\psi_n^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}}{\psi_0^{\frac{1}{2}n(n-1)}} \cdot \partial(v)$$

die Determinante des Substitutionssystems, vermittelst dessen sich $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$ als lineare Functionen von $f_0, f_1, \ldots f_{n-1}$ darstellen lassen, d. h. also diejenige Determinante, deren Quadrat im § 3 als ausserwesentlicher

Theiler der Discriminante von x charakterisirt worden ist. Offenbar muss nun, da ψ_n und ψ_0 ohne gemeinsamen Factor sind, der Quotient $\frac{\partial(v)}{\psi_n^{\frac{1}{2}n(n-1)}}$ für sich eine ganze rationale Function von v sein. Wird dieser Quotient mit $\delta(v)$ bezeichnet, so ist demnach $\psi_n^{(n-1)(n-2)}.\delta(v)^2$ der ausserwesentliche Theiler der Discriminante $D(v)$. Folglich ist, wenn $\Delta(v)$, wie früher, den wesentlichen Theiler derselben bedeutet:

$$D(v) = \psi_n^{(n-1)(n-2)}.\delta(v)^2.\Delta(v)$$

und also:

$$\theta(v) = \delta(v)^2.\Delta(v).$$

Hierdurch wird es gerechtfertigt, dass $\Delta(v)$ auch der wesentliche Theiler der Discriminante $\theta(v)$ genannt wird, und $\delta(v)^2$ der ausserwesentliche Theiler derselben, d. h. ***dass unter dem wesentlichen Theiler der Discriminante einer beliebigen algebraischen Function y gradezu der wesentliche Theiler der Discriminante*** irgend einer ***ganzen*** algebraischen Function verstanden wird, welche durch y dividirt eine ganze rationale Function der unabhängigen Variabeln ergiebt. Auf Grund der im § 5 angeführten zweiten Eigenschaft des wesentlichen Theilers erhält man demnach für den wesentlichen Theiler der Discriminante einer ***beliebigen*** algebraischen Function m^{ter} Ordnung y die charakteristische Eigenschaft,

> dass derselbe der grösste gemeinsame Factor der Discriminanten aller derjenigen algebraischen Functionen n^{ter} Ordnung ist, welche sich durch y und die unabhängige Variable rational ausdrücken lassen.

Diese bemerkenswerthe Beziehung zeigt deutlich die Analogie mit der Invarianten-Eigenschaft der Discriminante selbst. Aber während vermöge dieser letzteren die gesammte Discriminante von y nur unverändert bleibt, wenn y durch eine ***lineare*** Function $\frac{y+\varphi}{\psi y+\varphi\psi+1}$ ersetzt wird, haben wir in dem wesentlichen Theiler der Discriminante von y das Bleibende und zwar den einzig bleibenden Theil derselben für ***alle rationalen*** Functionen von y und v erkannt.

§ 8.

Wenn unter Beibehaltung der in den vorigen Paragraphen gebrauchten ›zeichnungen $v-\alpha$ ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante von also ein Factor von $\delta(v)$ ist, so muss $v-\alpha$ auch ein ausserwesentlicher

Factor der Discriminante der ganzen algebraischen Function x sein, deren gesammter ausserwesentlicher Theiler durch

$$\psi_n^{(n-1)(n-2)}\mathfrak{d}(v)^2$$

dargestellt worden ist. Es müssen demnach gemäss § 3 ganze rationale Functionen von x und v existiren, welche durch $v-\alpha$ dividirt algebraisch ganz bleiben, d. h. wenn irgend eine derselben mit $\mathfrak{f}(x,v)$ bezeichnet wird, so muss $\frac{\mathfrak{f}(x,v)}{v-\alpha}$ eine ganze algebraische Function von v sein, während $\mathfrak{f}(x,v)$ selbst eine ganze Function höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von x ist, deren Coefficienten ganze rationale, nicht durch $v-\alpha$ theilbare Functionen von v sind. Demzufolge muss auch $\frac{\mathfrak{f}(x,\alpha)}{v-\alpha}$ eine ganze algebraische Function von v sein. Andererseits ist aber auch, da x durch die Gleichung $F(x,v)=0$ definirt wird,

$$\frac{F(x,\alpha)}{v-\alpha} \quad \text{übereinstimmend mit} \quad \frac{F(x,\alpha)-F(x,v)}{v-\alpha}$$

algebraisch ganz; wenn daher $\varphi(x)$ der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{f}(x,\alpha)$ und $F(x,\alpha)$ ist, so muss auch

$$\frac{\varphi(x)}{v-\alpha}$$

eine ganze algebraische Function von v sein und für $v=\alpha$ endlich bleiben. Die Function $\varphi(x)$ muss daher für jeden der verschiedenen Werthe von x verschwinden, für den $F(x,\alpha)=0$ wird, d. h. also, $\varphi(x)$ muss jeden der von einander verschiedenen Linearfactoren von $F(x,\alpha)$ enthalten. — Es sei nunmehr $\psi(x)$ der Quotient der Division von $F(x,\alpha)$ durch $\varphi(x)$, so dass also $\psi(x)$ keine anderen als die bereits in $\varphi(x)$ vorkommenden Linearfactoren enthält; es seien ferner F_1, F_2, F_3, ... die erste, zweite, dritte, u. s. w. Ableitung von $F(x,v)$ nach v, so besteht die Gleichung

$$F(x,\ v)=\varphi(x).\psi(x)+(v-\alpha)F_1(x,\ \alpha)+\tfrac{1}{2}(v-\alpha)^2F_2(x,\ \alpha)+\cdots=0,$$

und es ist also für $v=\alpha$:

$$\psi(x)\cdot\frac{\varphi(x)}{v-\alpha} = -F_1(x,\ \alpha).$$

Da nun $\frac{\varphi(x)}{v-\alpha}$ als ganze algebraische Function von v für $v=\alpha$ und sämmtliche zugehörigen Werthe von x endlich bleibt, so muss $F_1(x,\alpha)$ für alle Wurzeln der Gleichung $\psi(x)=0$, d. h. also für mindestens eine von den Wurzeln der Gleichung $F(x,\alpha)=0$ verschwinden, da $\psi(x)$ mindestens vom ersten Grade ist. Da überdies durch Differentiation der obigen Gleichung

nach x für den Werth $v = \alpha$ die Gleichung

$$F'(x, \alpha) = \varphi'(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi'(x),$$

entsteht, wenn mit $F'(x, \alpha)$, φ', ψ' in üblicher Weise die Ableitungen von $F(x, \alpha)$, $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ bezeichnet werden, und da für jede Wurzel a der Gleichung $\psi(x) = 0$ auch $\varphi(a) = 0$ wird, so sind für

$$x = a, \quad v = \alpha$$

die drei Gleichungen

$$F(x, v) = 0, \quad F'(x, v) = 0, \quad F_1(x, v) = 0$$

gleichzeitig erfüllt, d. h. es verschwindet für die Werthe $x = a$, $v = \alpha$ gleichzeitig die Function $F(x, v)$ selbst mit ihren beiden nach x und v genommenen Derivirten. Andererseits soll nun gezeigt werden, dass, wenn dies der Fall ist, wenn also die drei Functionen

$$F(x, \alpha), \quad F'(x, \alpha), \quad F_1(x, \alpha)$$

den gemeinschaftlichen Theiler $x - a$ haben, nothwendig $v - \alpha$ ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante sein muss.

Setzt man $y = x - (v - \alpha)w$, wo w eine beliebige Grösse bedeutet, so ist

$$F(x, v) - F(y, \alpha) - (v - \alpha)\left(wF'(y, \alpha) + F_1(y, \alpha)\right)$$

eine durch $(v - \alpha)^2$ theilbare ganze Function von y und v. Wird dieselbe durch

$$(v - \alpha)^2 G(y, v)$$

bezeichnet, so ist daher

$$F(y, \alpha) + (v - \alpha)wF'(y, \alpha) + (v - \alpha)F_1(y, \alpha) + (v - \alpha)^2 G(y, v) = 0,$$

und wenn diese Gleichung durch $(y - a)(v - \alpha)$ dividirt und für $F(y, \alpha)$, welches durch $y - a$ theilbar ist, $(y - a)\mathfrak{f}(y)$ gesetzt wird,

$$\frac{\mathfrak{f}(y)}{v - \alpha} + \frac{wF'(y, \alpha) + F_1(y, \alpha)}{y - a} + \frac{v - \alpha}{y - a} G(y, v) = 0.$$

Der Voraussetzung nach haben $F'(x, \alpha)$ und $F_1(x, \alpha)$ den gemeinschaftlichen Theiler $x - a$ und folglich $F'(y, \alpha)$ und $F_1(y, \alpha)$ den gemeinschaftlichen Theiler $y - a$. Das mittlere Glied der Gleichung ist also algebraisch ganz, und es muss daher auch das erste Glied $\frac{\mathfrak{f}(y)}{v - \alpha}$ algebraisch ganz sein, wenn der Bruch $\frac{v - \alpha}{y - a}$ für keinen endlichen Werth von v unendlich wird. Der Werth dieses Bruches wird aber für $y = a$, $v = \alpha$ gleich

$$-\frac{F'(a, \alpha)}{F_1(a, \alpha) + wF'(a, \alpha)},$$

und dieser Werth ist endlich, wenn die Grösse w, wie es offenbar möglich ist, so bestimmt wird, dass die Summe

$$F_1(x, \alpha) + w F'(x, \alpha)$$

den beiden Theilen gemeinsamen Factor $x - a$ nicht öfter enthält als $F'(x, \alpha)$. Da endlich mit

$$\frac{\mathfrak{f}(y)}{v-\alpha} \quad \text{d. i.} \quad \frac{\mathfrak{f}(x-(v-\alpha)w)}{v-\alpha} \quad \text{auch} \quad \frac{\mathfrak{f}(x)}{v-\alpha}$$

eine ganze algebraische Function von v ist, so besitzt der Factor $v - \alpha$ in der That jene im § 3 erwähnte Eigenschaft, welche denselben als ausserwesentlichen Factor der Discriminante kennzeichnet.

Die hiermit erlangte dritte charakteristische Eigenschaft eines ausserwesentlichen Factors $v - \alpha$, dass den drei Gleichungen

$$F(x, v) = 0, \quad F'(x, v) = 0, \quad F_1(x, v) = 0$$

durch den Werth $v = \alpha$ und einen zugehörigen Werth von x genügt werden kann, soll nunmehr noch näher bestimmt, beziehungsweise erweitert werden.

Bezeichnet man mit U, V beliebige oder unbestimmte Grössen und bildet das Product

$$\prod_k (UF'(x_k, v) + VF_1(x_k, v)) \qquad (k=0, 1, \ldots n-1).$$

so erhält man eine ganze homogene Function n^{ter} Ordnung von U und V, deren Coefficienten sämmtlich *durch* $(v-\alpha)^2$ *theilbare* ganze Functionen von v sind. Setzt man nämlich, wie oben, $y = x - (v - \alpha)w$ und berücksichtigt, dass

$$F'(x, v) - F'(y, \alpha) \quad \text{und} \quad F_1(x, v) - F_1(y, \alpha)$$

durch $v - \alpha$ und andererseits

$$F'(y, \alpha) \quad \text{und} \quad F_1(y, \alpha)$$

durch $y - a$ theilbar sind, so sieht man, dass sich jeder Factor jenes Productes auf die Form

$$(y_k - a)\varphi_k + (v-\alpha)\psi_k$$

bringen lässt, wo φ_k und ψ_k ganze rationale Functionen von x_k und v bedeuten, in deren Coefficienten noch U und V linear vorkommen. Das Product selbst, welches mit $P(U, V)$ bezeichnet werden möge, wird demnach in der That durch $(v-\alpha)^2$ theilbar sein, wenn die ganze rationale Function von v, U, V

$$\prod_k (y_k - a) \prod_k \varphi_k \left\{1 + \sum_k \frac{\psi_k(v-\alpha)}{\varphi_k(y-a)}\right\} \qquad (k=0, 1, \ldots n-1)$$

den Theiler $(v-\alpha)^2$ enthält. Und dies ist wirklich der Fall; denn erstens fallen in der Entwickelung des Productes $\Pi(y_k-a)$ nach Potenzen von $(v-\alpha)$ die ersten beiden Glieder weg, da

$$\Pi_k(y_k-a) = \pm F(a+(v-\alpha)w,\ v)$$

ist, und es ist daher dieses Product durch $(v-\alpha)^2$ theilbar; zweitens ist der mit diesem Producte multiplicirte Ausdruck eine rationale Function von v, welche — wie dies oben von $\frac{v-\alpha}{y-a}$ gezeigt ist — für $v=\alpha$ nicht unendlich wird.

Die ganze homogene Function $P(U, V)$ enthält, wie soeben bewiesen worden, jeden ausserwesentlichen Factor der Discriminante zweimal, und offenbar nicht *mehr* als zweimal, wenn die Discriminante selbst, welche in $P(U, V)$ als Coefficient von U^n erscheint, denselben Factor nicht öfter enthält. Es ist ferner $P(U, V)$ durch keinen anderen Factor $v-\alpha$ theilbar als durch einen solchen, der ausserwesentlicher Factor der Discriminante ist; denn die Bedingung $P(U, V)=0$ für $v=\alpha$, zieht offenbar die Relationen

$$F'(x_k,\ v)=0,\quad F_1(x_k,\ v)=0 \quad \text{für} \quad v=\alpha$$

nach sich, d. h. es muss für $v=\alpha$ den drei Gleichungen

$$F(x,\ v)=0,\quad F'(x,\ v)=0,\quad F_1(x,\ v)=0$$

gleichzeitig genügt werden können, und dies ist, wie oben gezeigt worden, nur möglich, wenn $v-\alpha$ ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante der Gleichung $F(x, v)$ ist.

Wendet man das erlangte Resultat auf die Gleichung an, welcher die im § 5 mit z_k bezeichnete Function

$$w_0 f_0(x_k,\ v)+w_1 f_1(x_k,\ v)+\cdots+w_{n-1}f_{n-1}(x_k,\ v)$$

genügt, und deren ausserwesentlicher Theiler nach der dortigen Bezeichnung das Quadrat von

$$W(v,\ w_0,\ w_1,\ \dots\ w_{n-1})$$

ist, so muss, wenn

$$\Pi_k(z-z_k) = G(z,\ v)$$

gesetzt wird, das auf alle n Werthe $z=z_0,\ z_1,\ \dots\ z_{n-1}$ erstreckte Product

$$\Pi\left(U\frac{\partial G(z,v)}{\partial z}+V\frac{\partial G(z,v)}{\partial v}\right)$$

durch das Quadrat jedes Linearfactors von $W(v)$ und also, da für unbestimmte

Werthe von $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ diese Linearfactoren sämmtlich unter einander verschieden sind, durch das Quadrat von $W(v)$ selbst theilbar sein. Es wird nun bei geeigneter Bestimmung von $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ jener mit z_k bezeichnete Ausdruck gleich x_k selbst; für diese besonderen Werthe der Grössen w geht dann $G(x, v)$ in $F(x, v)$ über, und $W(v)^2$ wird der gesammte ausserwesentliche Factor der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$. Hieraus geht also schliesslich hervor, dass der mit $P(U, V)$ bezeichnete Ausdruck durch den ganzen quadratischen ausserwesentlichen Factor der Discriminante theilbar sein muss und dass, da derselbe, wie oben nachgewiesen ist, keine anderen von U, V unabhängigen Factoren enthalten kann,

der ausserwesentliche Theiler der Discriminante der Gleichung $F(x, v) = 0$ als der grösste von U, V unabhängige Theiler des über alle n Wurzeln der Gleichung erstreckten Productes

$$\Pi\left(U \frac{\partial F(x, v)}{\partial x} + V \frac{\partial F(x, v)}{\partial v}\right)$$

zu charakterisiren ist.

Diese Eigenschaft des ausserwesentlichen Theilers entspricht in gewisser Hinsicht der obigen zweiten Eigenschaft des wesentlichen Theilers. Während der wesentliche Theiler bei rationaler Transformation von x erhalten bleibt, d. h. wenn die Gleichung $F(x, v) = 0$ in eine andere $G(y, v) = 0$ transformirt wird, deren Wurzel y eine rationale Function von x und v ist, bleiben die ausserwesentlichen Factoren der Discriminante bei linearer Transformation von v erhalten, da

$$F(x, v' + ux), \quad \frac{\partial F(x, v' + ux)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F(x, v' + ux)}{\partial v'}$$

gleichzeitig für die Werthe $x = a$, $v' + ux = \alpha$ verschwinden, wenn

$$F(x, v), \quad \frac{\partial F(x, v)}{\partial x}, \quad \frac{\partial F(x, v)}{\partial v}$$

gleichzeitig für die Werthe $x = a$, $v = \alpha$ Null werden. Es sind dies bekanntlich die Werthepaare, welche die Doppelpunkte der durch $F(x, v) = 0$ dargestellten Curve bezeichnen, wenn x und v als Punktcoordinaten in der Ebene aufgefasst werden.

(Fortsetzung folgt.)

Beitrag zur linearen Transformation der elliptischen Functionen.

(Von Herrn *Otto Rausenberger* in Frankfurt a. M.)

Bekanntlich lassen sich alle linearen Transformationen der Transcendenten

$$(1.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(\tau, w) = \Sigma e^{n(2w+n\tau)\pi i} & (n=-\infty,\dots+\infty) \\ \quad = \vartheta_3(\tau, 0)\,\Pi\left(1-\frac{w}{m+\frac{1}{2}+(n+\frac{1}{2})\tau}\right) & \left(\begin{smallmatrix} n=-\nu-1,\dots+\nu;\ \nu=\infty \\ m=-\mu-1,\dots+\mu;\ \mu=\infty \end{smallmatrix}\right) \\ \quad = \Pi(1-e^{2(n+1)\pi i\tau})(1+2e^{(2n+1)\pi i\tau}.\cos 2w\pi+e^{(4n+2)\pi i\tau}) & (n=0,\dots\infty) \end{cases}$$

(es genügt diese einzige zu behandeln) auf die beiden Hauptfälle zurückführen, dass an Stelle von τ

$$(2.)\quad \tau' = -\frac{1}{\tau},$$

oder

$$(3.)\quad \tau'' = \tau+1$$

tritt (S. *Königsberger,* Elliptische Functionen, II, p. 69). Nur der erste Fall bietet Schwierigkeiten dar. Es ist nach (1.)

$$(4.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(\tau', w) = \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) \\ \quad = \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right)\Pi\left(1-\frac{w}{m+\frac{1}{2}-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{\tau}}\right) & \left(\begin{smallmatrix} n=-\nu-1,\dots+\nu \\ m=-\mu-1,\dots+\mu \end{smallmatrix}\right) \\ \quad = \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right)\Pi\left(1-\frac{\tau w}{(m+\frac{1}{2})\tau-(n+\frac{1}{2})}\right) \\ \quad = \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right)\Pi\left(1-\frac{\tau w}{(m+\frac{1}{2})\tau+n+\frac{1}{2}}\right), \end{cases}$$

ein Ausdruck, dessen Nullwerthe mit denen von $\vartheta_3(\tau, \tau w)$ übereinstimmen; hieraus schliessen wir, dass $\vartheta_3(\tau', w)$ und $\vartheta_3(\tau, \tau w)$ sich nur um einen nirgends Null werdenden Factor, also eine Exponentialfunction, unterscheiden

können. Wir setzen somit

$$(5.)\quad \begin{cases} \vartheta_3(\tau', w) = e^{\pi i(a_0+a_1w+a_2w^2+\cdots)}.\vartheta_3(\tau, \tau w) \\ \qquad\qquad = e^{\pi i\varphi(w)}.\vartheta_3(\tau, \tau w), \end{cases}$$

also

$$(6.)\quad e^{\pi i\varphi(w)} = \frac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, w\right)}{\vartheta_3(\tau, \tau w)}.$$

Unter Berücksichtigung der bekannten Relationen:

$$(7.)\quad \vartheta_3(\tau, w+1) = \vartheta_3(\tau, w),$$

$$(8.)\quad \vartheta_3(\tau, w+\tau) = e^{-(2w+\tau)\pi i}.\vartheta_3(\tau, w)$$

gewinnen wir, indem wir in (6.) $w+1$ statt w einsetzen, für $\varphi(w)$ die Functionalgleichung

$$(9.)\quad \varphi(w+1)-\varphi(w)+2k\pi i = 2w\tau+\tau,$$

in der wir die beliebige ganze Zahl k zunächst als 0 annehmen wollen. Betrachten wir ferner vorläufig $\varphi(w)$ als ganze Function von endlichem (dem n^{ten}) Grade:

$$\varphi(w) = a_0+a_1w+a_2w^2+\cdots+a_nw^n,$$

so finden wir leicht, dass $\varphi(w+1)-\varphi(w)$ vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade sein muss. Aus (9.) schliessen wir daher, dass $\varphi(w)$ vom zweiten Grade,

$$\varphi(w) = a_0+a_1w+a_2w^2$$

ist, und aus (9.) wird

$$(10.)\quad a_1+a_2+2a_2w = 2w\tau+\tau,$$

woraus $a_1 = 0$, $a_2 = \tau$ folgt, während a_0 unbestimmt bleibt. Da durch die Annahme

$$(11.)\quad \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = C.e^{\pi i\tau w^2}.\vartheta_3(\tau, \tau w)$$

wirklich den Gleichungen (4.) und (8.) genügt wird, so erkennen wir, dass sie die richtige ist und die ausgelassenen Fälle nicht untersucht zu werden brauchen. $C = \psi(\tau)$ ist von w, jedoch nicht von τ unabhängig. In der Bestimmung dieser Grösse liegt die Hauptschwierigkeit der linearen Transformation; dieselbe in einer Weise durchzuführen, welche von den bekannten Methoden von *Eisenstein*, *Hermite* u. s. w. wesentlich verschieden ist, wird im Folgenden beabsichtigt.

Setzen wir in (11.) zuerst $w = 0$, dann $w = \frac{1}{2}$, so erhalten wir bei Benutzung der Abkürzungen

$$p = e^{\pi i \tau}, \quad q = e^{-\frac{\pi i}{\tau}}$$

die Gleichungen

$$(12.)\quad \begin{cases} \psi(\tau) = \dfrac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, 0\right)}{\vartheta_3(\tau, 0)} \\ \qquad = \Pi \dfrac{(1-q^{2n+2})(1+q^{2n+1})^2}{(1-p^{2n+2})(1+p^{2n+1})^2} \end{cases} \qquad (n = 0, \dots \infty)$$

und

$$(13.)\quad \begin{cases} \psi(\tau) = \dfrac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{1}{2}\right)}{\vartheta_3(\tau, \frac{1}{2}\tau)} \\ \qquad = \dfrac{1}{p^{\frac{1}{4}}} \Pi \dfrac{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+1})^2}{(1-p^{2n+2})(1+p^{2n})(1+p^{2n+2})} \\ \qquad = \dfrac{1}{2p^{\frac{1}{4}}} \Pi \dfrac{(1-q^{2n+2})(1-q^{2n+1})^2}{(1-p^{2n+2})(1+p^{2n+2})^2}. \end{cases} \qquad (n = 0, \dots \infty)$$

Wird in (13.) $\frac{1}{2}\tau$ an Stelle von τ, also $p^{\frac{1}{2}}$ für p, q^2 für q eingeführt, so erhalten wir

$$(14.)\quad \psi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{1}{2p^{\frac{1}{8}}} \Pi \frac{(1-q^{4n+4})(1-q^{4n+2})^2}{(1-p^{n+1})(1+p^{n+1})^2} \qquad (n = 0, \dots \infty).$$

Nun folgt aber durch Multiplication von (12.) mit (13.) und Wurzelausziehung:

$$(15.)\quad \begin{cases} \psi(\tau) = \dfrac{1}{\sqrt{2}.p^{\frac{1}{8}}} \Pi \dfrac{(1-q^{2n+2})(1+q^{2n+1})(1-q^{2n+1})}{(1-p^{2n+2})(1+p^{2n+1})(1+p^{2n+2})} \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{2}.p^{\frac{1}{8}}} \Pi \dfrac{(1-q^{2n+2})(1-q^{4n+2})}{(1-p^{2n+2})(1+p^{n+1})} \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{2}.p^{\frac{1}{8}}} \Pi \dfrac{(1-q^{4n+4})(1-q^{4n+2})^2}{(1-p^{n+1})(1+p^{n+1})^2}, \end{cases} \qquad (n = 0, \dots \infty)$$

und die Vergleichung von (14.) und (15.) ergiebt die wichtige Functionalgleichung

$$(16.)\quad \psi\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{2}}$$

oder

$$(17.)\quad \psi(2\tau) = \psi(\tau)\sqrt{2},$$

oder wenn

$$(18.)\quad f(\tau) = \frac{\psi(\tau)}{\sqrt{\tau}}$$

gesetzt wird,

$$(19.)\qquad f(2\tau) = f(\tau).$$

Aus (12.) folgt ausserdem sofort

$$(20.)\qquad \psi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\psi(\tau)}.$$

Um noch eine Functionalgleichung herzuleiten, setzen wir in (11.) $w = -\frac{1}{2\tau} - \frac{1}{6}$ und erhalten

$$\psi(\tau) = \frac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{2\tau}-\frac{1}{6}\right)}{e^{\pi i\tau\left(\frac{1}{2\tau}+\frac{1}{6}\right)^2}\vartheta_3(\tau, -\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\tau)}$$

$$= \frac{q^{\frac{1}{4}}}{e^{\frac{1}{6}\pi i}p^{\frac{1}{36}}}\,\Pi\,\frac{(1-q^{2n+2})(1+q^{2n+1}\{e^{\pi i\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{3}\right)}+e^{-\pi i\left(\frac{1}{\tau}+\frac{1}{3}\right)}\}+q^{4n+2})}{(1-p^{2n+2})(1+p^{2n+1}\{e^{\pi i(\frac{1}{3}\tau+1)}+e^{-\pi i(\frac{1}{3}\tau+1)}\}+p^{4n+2})}$$

$$= \frac{q^{\frac{1}{4}}}{e^{\frac{1}{6}\pi i}p^{\frac{1}{36}}}\,\Pi\,\frac{(1-q^{2n+2})(1+q^{2n}e^{\frac{1}{3}\pi i})(1+q^{2n+2}e^{-\frac{1}{3}\pi i})}{(1-p^{2n+2})(1-p^{2n+1+\frac{1}{3}})(1-p^{2n+1-\frac{1}{3}})} \qquad (n=0, \dots \infty)$$

$$= \frac{q^{\frac{1}{4}}(1+e^{\frac{1}{3}\pi i})}{e^{\frac{1}{6}\pi i}p^{\frac{1}{36}}}\,\Pi\,\frac{(1-q^{2n})(1+q^{2n}e^{\frac{1}{3}\pi i})(1+q^{2n}e^{-\frac{1}{3}\pi i})}{(1-p^{\frac{2}{3}n})}, \qquad (n=1, \dots \infty),$$

oder, da $(1-q^{2n})(1+q^{2n}e^{\frac{1}{3}\pi i})(1+q^{2n}e^{-\frac{1}{3}\pi i}) = 1-q^{6n}$ und

$$\frac{1+e^{\frac{1}{3}\pi i}}{e^{\frac{1}{6}\pi i}} = \frac{1+\cos\frac{1}{3}\pi+i\sin\frac{1}{3}\pi}{\cos\frac{1}{6}\pi+i\sin\frac{1}{6}\pi} = \frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i} = \sqrt{3},$$

$$(21.)\qquad \psi(\tau) = \frac{q^{\frac{1}{4}}}{p^{\frac{1}{36}}}\sqrt{3}.\Pi\frac{(1-q^{6n})}{(1-p^{\frac{2}{3}n})}. \qquad (n=1, \dots \infty)$$

Setzen wir 3τ statt τ (also p^3 statt p, $q^{\frac{1}{3}}$ statt q) ein, so wird hieraus

$$(22.)\qquad \psi(3\tau) = \frac{q^{\frac{1}{12}}}{p^{\frac{1}{12}}}\sqrt{3}.\Pi\frac{(1-q^{2n})}{(1-p^{2n})}. \qquad (n=1, \dots \infty)$$

Vertauschen wir τ mit $-\frac{1}{\tau}$ (also p mit q) und nehmen beiderseits die reciproken Werthe, so folgt nach (20.)

$$(23.)\qquad \frac{1}{\psi\left(-\frac{3}{\tau}\right)} = \psi\left(\frac{\tau}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{q^{\frac{1}{12}}}{p^{\frac{1}{12}}}\,\Pi\frac{(1-q^{2n})}{(1-p^{2n})} \qquad (n=1, \dots \infty)$$

und somit durch Vergleichung von (22.) und (23.)

$$\psi(3\tau) = 3\psi\left(\frac{\tau}{3}\right)$$

oder

$$(24.)\qquad \psi(9\tau) = 3\psi(\tau)$$

oder nach (18.)

$$(25.)\qquad f(9\tau) = f(\tau).$$

Die Relationen (19.) und (25.) können wir zusammen durch die einzige Formel

$$(26.)\qquad f(2^r.9^s.\tau) = f(\tau)$$

ausdrücken, in der r und s beliebige ganze, positive oder negative Zahlen bedeuten. Man überzeugt sich aber leicht, dass das Product $2^r.9^s$ durch geeignete Wahl von r und s jedem reellen, positiven Werthe beliebig nahe gebracht werden kann. Denn es leuchtet zunächst ein, dass $2^r.9^s$ der Einheit nahezu gleich gemacht werden kann, wenn man der Gleichung $r\log 2+s\log 9 = 0$ oder

$$\frac{r}{s} = -\frac{\log 9}{\log 2}$$

annähernd zu genügen sucht, indem man für $\frac{r}{s}$ Näherungswerthe der irrationalen Grösse $-\frac{\log 9}{\log 2}$ wählt. Haben wir dann $2^r.9^s = 1\pm\delta$ (δ beliebig klein) erhalten, so ist klar, dass durch Erheben dieses Werthes in eine sehr hohe ganzzahlige positive oder negative Potenz jede beliebige positive Grösse näherungsweise dargestellt werden kann.

Sei nun $\tau = \varrho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$, worin ϱ reell positiv, ϑ reell ist, so wissen wir, dass

$$\psi(\tau) = \frac{\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_3(\tau)}$$

und somit auch $f(\tau)$ für jedes endliche τ, bei welchem $\sin\vartheta > 0$ ist, durchaus endlich und stetig sind. Denn $\vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}\right)$ und $\vartheta_3(\tau)$ sind unter dieser Bedingung absolut convergente, von Null verschiedene Producte in q und p, während letztere Grössen stetige Functionen von τ sind. Nach dem Vorhergehenden muss aber in Folge von (26.) $f(\tau) = f(\varrho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta))$ für unendlich viele, unendlich nahe bei einander liegende Werthe von ϱ, also wegen der Stetigkeit der Function für alle Werthe von ϱ dieselbe Grösse behalten. Weiter ist

$$(27.)\qquad \frac{\partial f}{\partial\varrho} = \frac{\partial f}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial\varrho} = \frac{\partial f}{\partial\tau}(\cos\vartheta+i\sin\vartheta),$$

$$(28.)\qquad \frac{\partial f}{\partial\vartheta} = \frac{\partial f}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\tau}{\partial\vartheta} = \frac{\partial f}{\partial\tau}\varrho(-\sin\vartheta+i\cos\vartheta).$$

Da nun $\frac{\partial f}{\partial \varrho} = 0$, also auch nach (27.) $\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$, mithin nach (28.) $\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = 0$ sein muss, so finden wir $f(\tau)$ von ϱ wie ϑ, also überhaupt von τ unabhängig. Wir setzen $f(\tau) = c$, somit

$$(29.) \qquad \psi(\tau) = c\sqrt{\tau},$$

woraus nach (20.) weiter folgt

$$(30.) \qquad \psi(\tau) = \frac{1}{\psi\left(-\frac{1}{\tau}\right)} = \frac{\sqrt{-\tau}}{c},$$

also durch Multiplication von (29.) mit (30.) und Wurzelausziehung

$$(31.) \qquad \psi(\tau) = \sqrt{i\tau}.$$

Sonach haben wir schliesslich

$$(32.) \qquad \vartheta_3\left(-\frac{1}{\tau}, w\right) = \sqrt{i\tau}\,.\,e^{\pi i \tau w^2}.\vartheta_3(\tau, \tau w).$$

Wenn sich diese Herleitung auch vor den anderen bekannten nicht durch besondere Kürze auszeichnet, so glaube ich doch, dass sie wegen ihres vorherrschend algebraischen Charakters nicht ohne Interesse ist. Jedenfalls lassen sich statt der benutzten Functionalgleichungen auch andere herleiten, die dasselbe leisten, und es ist vielleicht hierdurch möglich, die Untersuchung eleganter zu gestalten, als es mir bis jetzt gelungen ist.

Frankfurt a. M., October 1880.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Nachtrag zu der Abhandlung Seite 79 dieses Bandes.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

Wenn die Integrale der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ in No. 1 aus der Integralformel No. 1 (11.) entnommen werden, so ergiebt sich der constante Factor c in der Differentialdeterminante dieser Integrale No. 1 (16.) als ***rationale Function gegebener Constanten*** No. 1 (18.). Da diese Determinante gleich $\mu_1 \mu_2 \dots \mu_m$ No. 1 (14.) wird, so ist es für den Werth derselben beliebig, ob und welche Constanten in Formel No. 1 (11.) bei der jedesmaligen Integration addirt werden, was auch aus No. 1 (13.) folgt. F_m habe nun die Darstellung durch eine normale canonische Form (No. 9). Findet sich gemäss No. 9 II *b.*), dass man F_m durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellen kann, welches die in No. 1 vor *a.*) angegebene Eigenschaft hat, so kann man aus diesem System alle Integrale entnehmen und erhält den constanten Factor in ihrer Differentialdeterminante durch No. 1 (18.). Es soll nun hier gezeigt werden, dass man im Allgemeinen aus der normalen canonischen Form von F_m solche Systeme normaler Ausdrücke herleiten kann, welche bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ die Gruppenexponenten einstellig enthalten, aus denen sich demnach gemäss No. 5 und 9 die Integrale von $F_m = 0$ herleiten lassen und zwar solche Integrale, die man successive durch eine Integralformel wie No. 1 (11.) ausdrücken kann, ***aus welcher Formel dann der constante Factor in der Differentialdeterminante*** No. 1 (16.) ***sich als rationale Function gegebener Constanten nach*** No. 1 (18.) ***findet*** (vgl. No. 5 I *b.*)).

a.) Man habe eine Anzahl Differentialausdrücke $\chi_r(y, x)$ $(r = 1 \dots s)$ von der Form $\varphi_r(y, x) = y_1$, $\psi_r(y_1, x)$, wo φ_r und ψ_r Systeme normaler Differentialausdrücke sind, φ_r sich auch auf y reduciren kann und φ_1 gleich y ist. Bei einem singulären Punkte von $F_m = 0$ soll das System ψ_r einen bei diesem Punkte normalen Ausdruck (No. 5 I *a.*)) bilden, und es sollen

die Gruppenexponenten aus ψ_r nicht in den Bestandtheilen von φ_r vorkommen. Es werden Integrale von $\varphi_r = y_1$, $\psi_r = 0$ in der Anzahl α_r, der Ordnung von ψ_r, genommen, in denen die y_1 linearunabhängig sind; diese Integrale bei $r = 1 \dots s$ sollen ein System linearunabhängiger Integrale von $F_m = 0$ bilden. Nun seien die Ausdrücke χ_r so beschaffen, dass wenn die Integrale von $\chi_1 = 0$ bis $\chi_{r-1} = 0$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung $G = 0$ vereinigt sind, *diese auch die Integrale von $\varphi_r = 0$ enthält,* während die angenommenen α_r Integrale von $\varphi_r = y_1$, $\psi_r(y_1, x) = 0$ *von denen in $G = 0$ linearunabhängig sein sollen.*

Es werden nun die Integrale von $G = 0$ und $\chi_r = 0$ in einer Differentialgleichung vereinigt (vgl. No. 7 I). Die in dem Satze betrachteten α_r Integrale von $\chi_r = 0$ sollen aus der Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \varphi_r(y, x) = \mu_{r1} \int dx \, \mu_{r1}^{-1} \mu_{r2} \dots \int \mu_{rl-1}^{-1} \mu_{rl} \, dx \qquad (l = 1 \dots \alpha_r)$$

hervorgehen, wo μ_{rl} von der Form

$$e^{w_r} (x-a)^{\varrho_l - l + 1} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha,$$

c_0 von Null verschieden, w_r von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ oder gleich Null ist. μ_{rl} sei gleich $e^{w_r} \nu_{rl}$ gesetzt. Setzt man die α_r Integrale aus (1.) in $G(y, x)$ ein, so erhält man

$$(2.) \qquad G(y, x) = e^{w_r} \sigma_{r1} \int dx \, \sigma_{r1}^{-1} \sigma_{r2} \dots \int \sigma_{rl-1}^{-1} \sigma_{rl} \, dx \qquad (l = 1 \dots \alpha_r),$$

wo die σ Ausdrücke von der Form $(x-a)^\varepsilon \sum_0^\infty k_\alpha (x-a)^\alpha$ sind, k_0 von Null verschieden ist, und diese Ausdrücke sich auf folgende Weise ergeben. Der Differentialausdruck G sei auf die Form gebracht $\varphi_r(y, x) = y_1$, $\gamma(y_1, x)$. Es sei $\gamma(e^{w_r} u, x) = e^{w_r} \gamma'(u, x)$ gesetzt. Dann sind in $\gamma'(u, x)$ die α_r Ausdrücke

$$(3.) \qquad u = \nu_{r1} \int dx \, \nu_{r1}^{-1} \nu_{r2} \dots \int \nu_{rl-1}^{-1} \nu_{rl} \, dx \qquad (l = 1 \dots \alpha_r)$$

zu setzen, wodurch man α_r linearunabhängige Grössen erhält, so dass man dem Resultate die Form geben kann

$$(4.) \qquad \gamma'(u, x) = \sigma_{r1} \int dx \, \sigma_{r1}^{-1} \sigma_{r2} \dots \int \sigma_{rl-1}^{-1} \sigma_{rl} \, dx \qquad (l = 1 \dots \alpha_r),$$

wo nun die Ausdrücke der σ zu bestimmen sind. Es ergiebt sich

$$(5.) \qquad \gamma'(\nu_{r1}, x) = \sigma_{r1}.$$

Wird $\sigma_{r1} \frac{d}{dx} \sigma_{r1}^{-1} \gamma'(u, x)$ oder

$$(6.) \qquad \gamma'(u, x) = \sigma_1, \quad \frac{d\sigma_1}{dx} - \frac{d \log \sigma_{r1}}{dx} \sigma_1 = \beta(u, x)$$

gesetzt, so folgt hieraus, weil $\beta(\nu_{r1}, x) = 0$ ist,

$$(7.) \qquad \frac{du}{dx} - \frac{d\log\nu_{r1}}{dx} u = u_1, \quad \gamma''(u_1, x) = \beta(u, x).$$

Setzt man in $\gamma''(u, x)$ ein $\nu_{r2}\int dx_2 \nu_{r2}^{-1}\nu_{r3}\dots\int \nu_{rl-1}^{-1}\nu_{rl}\,dx$, so erhält man

$$(8.) \qquad \gamma''(u, x) = \sigma_{r2}\int dx\,\sigma_{r2}^{-1}\sigma_{r3}\dots\int \sigma_{rl-1}^{-1}\sigma_{rl}\,dx \qquad (l = 2\dots\alpha_r)$$

und hat in Bezug auf γ'' in derselben Weise wie in Bezug auf γ' zu verfahren u. s. w. Wenn man nun

$$(9.) \qquad e^{w_r}\sigma_{rl} = \tau_{rl} \qquad (l = 1\dots\alpha_r)$$

setzt, so ergiebt sich (vgl. Abhdl. Bd. 83 No. 9 (2.)), dass die in Betracht gezogenen m Integrale von $F_m = 0$ in der Integralformel

$$(10.) \qquad \tau_1\int dx\,\tau_1^{-1}\tau_2\dots\int \tau_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\tau_{\mathfrak{b}}\,dx \qquad (\mathfrak{b} = 1\dots m)$$

enthalten sind, in welcher der Zeiger

$$(11.) \qquad \mathfrak{b} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{r-1} + \mathfrak{c} = r\mathfrak{c} \qquad \begin{pmatrix} r = 1\dots s \\ \mathfrak{c} = 1\dots\alpha_r \end{pmatrix}$$

zu setzen ist, alsdann die Werthe der τ aus (9.) zu nehmen sind. Der constante Factor in der Differentialdeterminante dieser Integrale ergiebt sich dann nach No. 1 (18.) durch das Product der Grössen k_0 in den σ als ***rationale Function gegebener Constanten.***

Entsprechend ist es bei $x = \infty$, indem $x = t^{-1}$ in $G = 0$ und $\chi_r = 0$ eingesetzt wird (vgl. No. 5 (5.) (6.)).

b.) Der in *a.*) enthaltene Satz ist anwendbar auf den allgemeinen Fall, der in No. 9 II *b.*) (Schluss) angegeben ist. In diesem Falle sollen die Systeme χ_r des Satzes *a.*) so gebildet werden, dass auf das System der vorhergehenden canonischen Bestandtheile von F_m als φ_r folgt der Differentialausdruck ψ_r der Art, dass $\psi_r = 0$ die Integrale der Hauptunterdifferentialgleichungen des folgenden canonischen Bestandtheiles, welche den zu dem singulären Punkte gehörenden determinirenden Factor No. 5 I *a.*) übereinstimmend haben, enthält. Diejenigen χ_r, in denen ψ_r aus Hauptunterdifferentialgleichungen desselben canonischen Bestandtheiles hervorgeht, sollen auf einander folgen. Ferner ist der Satz in *a.*) anwendbar auf den Fall, wo die in No. 9 II *b.*) gestellten Bedingungen dahin abgeändert werden, dass wenn Hauptunterdifferentialgleichungen zweier canonischen Bestandtheile R und T und das System der zwischen liegenden canonischen Bestandtheile S (wo S auch nullter Ordnung sein kann) bei diesem Punkte übereinstimmende

determinirende Factoren haben, alsdann von den Wurzeln der Exponentengleichungen der zugehörigen bei demselben Punkte regulären Ausdrücke nur vorausgesetzt wird, dass diese Wurzeln zusammen betrachtet sich von solchen Wurzeln bei anderen Hauptunterdifferentialgleichungen nicht um ganze Zahlen unterscheiden. Hat dann R die Form $R'(y, x) = y_1$, $R''(y_1, x)$, wo $R' = 0$ die Integrale der übrigen Hauptunterdifferentialgleichungen aus R vereinigt enthält, und hat T die Form $T'(y, x) = y_1$, $T''(y_1, x)$, wo $T' = 0$ die Integrale der in dem Vorhergehenden in Betracht gezogenen Hauptunterdifferentialgleichungen von T vereinigt enthält, so wird der bezügliche Ausdruck ψ_r gleich $R''(y, x) = y_1$, $S(y_1, x) = y_2$, $T'(y_2, x)$.

In diesen beiden Fällen seien nun die Integrale aus (1.) aufgestellt. Wird $\gamma'(u, x)$ gebildet und ist die Ordnung von γ' gleich λ, so ist entweder in $\gamma' = 0$ der charakteristische Index h gleich λ, oder wenn derselbe kleiner als λ ist, so enthält die Exponentengleichung von $\gamma' = 0$ Wurzeln, die sich von den Exponenten in den v nicht um ganze Zahlen unterscheiden (vgl. No. 8 *a.*)). Wenn daher die Coefficienten in γ' mit g bezeichnet werden und die Ordnung, in welcher g_α für $x = a$ unendlich wird, π_α ($\geqq 0$) ist, so ist die Grösse k_0 in σ_{r1}

$$(12.)\quad \begin{cases} [(g_h(x-a)^{\pi_h})_{x=a}\,\varrho_1(\varrho_1-1)\dots(\varrho_1-(\lambda-h)+1) \\ +(g_{h+1}(x-a)^{\pi_h+1})_{x=a}\,\varrho_1\dots(\varrho_1-(\lambda-h)+2)+\dots+(g_\lambda(x-a)^{\pi_h+\lambda-h})_{x=a}]\,c_0. \end{cases}$$

In $\gamma'' = 0$ ist dann gleichfalls der charakteristische Index h entweder gleich λ oder die Exponentengleichung von $\gamma'' = 0$ enthält Wurzeln, die sich von den Exponenten in den v nicht um ganze Zahlen unterscheiden u. s. w.

Hieraus und aus (6.) und (7.) ergiebt sich, dass man von der Entwickelung jeder Grösse v nur ***das Anfangsglied*** $c_0(x-a)^{\varrho_l-l+1}$ ***zu kennen braucht,*** um den Anfangscoefficienten k_0 in jeder Grösse σ zu erhalten und durch das Product der Grössen k_0 den gesuchten constanten Factor in der Differentialdeterminante zu finden.

Greifswald, 24. Juni 1881.

Bemerkung: In dem Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik Jahrgang 1879 findet sich ein Referat über meine Abhandlung im 87. Bande dieses Journals, in welchem dieselbe mit der Abhandlung des Herrn *Fuchs* im 75. Bande verglichen wird. Dieses Referat bedarf der Berichtigung. Da die Discussion der Beziehungen zwischen beiden Abhandlungen von allgemeinerem Interesse zu sein scheint, so möge dieselbe hier folgen.

Von Herrn ***Fuchs*** ist auf die lineare Differentialgleichung (Abth. II No. 4 etc.) mit der unabhängigen Variabeln z eine rationale Substitution $z = F(w)$ im Allgemeinen von höherem als erstem Grade angewandt von der Beschaffenheit, dass die den singulären Punkten z im Endlichen entsprechenden Punkte $w = \alpha_k$ ***sämmtlich*** auf die Peripherie eines Kreises E verlegt werden, dessen Mittelpunkt $w = 0$ dem Punkte $z = \infty$ entspricht. Dann werden die Integrale bei $w = 0$ (No. 5) durch die bei α_k ausgedrückt und die hierbei in den linearen Ausdrücken der Integrale vorkommenden Constanten aufgesucht (No. 6, 7, 8, 9). Es werden also die linearen Relationen zwischen den Integralen der ursprünglichen Differentialgleichung ***bei den singulären Punkten im Endlichen einerseits und zwischen den Integralen bei*** $z = \infty$ ***andererseits aufgestellt*** (No. 10). Die aus den Constanten in diesen Relationen hervorgehenden Substitutionen, die inversen Substitutionen und die Substitutionen der Constanten, die bei dem Umgange um je einen singulären Punkt sich ergeben, werden zusammengesetzt als Substitutionen S und auf das Integralsystem bei $z = \infty$ angewandt (No. 11). Die Integrale dieses Systemes sind einwerthig, so lange eine aus dem Endlichen durch die singulären Punkte ins Unendliche gezogene Linie nicht überschritten wird. Die Darstellung derselben für dieses Gebiet ist Grundaufgabe der Abhandlung (Abth. I, Abth. II No. 12). Die Uebergänge dieser Integrale über die Abschnitte der genannten Linie zwischen je zwei auf einander folgenden singulären Punkten werden durch die vorhin erwähnten Substitutionen S und ihre inversen vermittelt (No. 13). Um ein bei einem Punkte entwickeltes Integral auf vorgeschriebenem Wege fortzusetzen, wird dasselbe durch das bei $z = \infty$ entwickelte System ausgedrückt (No. 10, 14), alsdann die Fortsetzung durch Anwendung der Substitutionen S und ihrer inversen bewerkstelligt (No. 13). Wenn die Integrale bei den oben genannten Punkten $w = 0$ und $w = \alpha_k$ regulär sind, so werden für die gesuchten Constanten die Ausdrücke No. 9 (4.) gegeben. Von diesen Ausdrücken ist aber die Convergenz in dem Punkte α_k nicht nachgewiesen, ferner ist die Convergenz der bei Darstellung der Integrale von $z = \infty$ in No. 12 geforderten bestimmten Integrale nicht gezeigt.

Dagegen ist in meiner Abhandlung (No. 3, 4, 10) bewiesen, wenn man auf die Differentialgleichung mit der unabhängigen Variabeln x eine Transformation $x = R(\xi)$ anwendet, bei welcher ein singulärer Punkt in $\xi = 0$ und einer in $\xi = 1$ fällt, die anderen aber ***ausserhalb*** des Kreises um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 liegen (jedoch dürfen ausserwesentlich singuläre Punkte noch auf oder in diesem Kreise liegen No. 6 *e.*)), und wenn die Integrale bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ regulär sind, dass alsdann in den linearen Relationen, welche die Integrale bei $\xi = 0$ durch die bei $\xi = 1$ darstellen, die Ausdrücke für die gesuchten Constanten in dem Punkte $\xi = 1$ selbst immer convergiren. Die einfachste hierzu dienende Transformation ist eine rationale Substitution ersten Grades, sobald die $\xi = 0$ und $\xi = 1$ entsprechenden singulären Punkte der ursprünglichen Differentialgleichung irgendwie in dem von einem Kreise begrenzten Gebiete liegen (welches auch $x = \infty$ enthalten darf), ausserhalb welches die übrigen singulären Punkte der Differentialgleichung sich finden. Ich ziehe daher durch die singulären Punkte eine sich selbst nicht schneidende, in sich zurücklaufende Linie (No. 6), so dass entweder je zwei auf einander folgende singuläre Punkte schon die vorhin angegebene Lage haben (z. B. wenn alle singulären Punkte im Endlichen auf einer Geraden oder auf einem convexen Polygon liegen), oder dass, nachdem noch

einzelne Punkte auf jener Curve im Endlichen oder Unendlichen hinzugenommen sind, nun je zwei auf einander folgende der fixirten Punkte sich in jener Lage befinden. Alsdann stelle ich mittels der vorhin bezeichneten Anwendung einer rationalen Substitution ersten Grades die linearen Relationen zwischen den Integralen bei *je einem dieser Punkte und dem nächstfolgenden* auf jener Curve auf. Sind die Integrale nicht regulär, so werden die Ausdrücke No. 3 (3.) der Constanten in einem nichtsingulären Punkte genommen. Die Substitutionen der bei diesem Verfahren erhaltenen Constanten und die Substitutionen derjenigen Constanten, die bei dem Umgange um je einen singulären Punkt sich ergeben, sind zusammenzusetzen, und auf das bei einem singulären Punkte entwickelte Integralsystem anzuwenden, um ein bei irgend einem Punkte gegebenes Integral fortzusetzen. Letzteres Integral wird ebenfalls durch eine rationale Transformation ersten Grades vermittelst der Integrale bei einem singulären Punkte (z. B. dem nächsten, eventuell $x = \infty$) ausgedrückt und die Darstellung der Fortsetzung auf vorgeschriebenem Wege auf eine Zusammensetzung der vorhin genannten Substitutionen reducirt (No. 6 c.)). Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe dient als Beispiel des Verfahrens (No. 8).

Was nun die Convergenz der Ausdrücke No. 9 (4.) in der Abhandlung des Herrn *Fuchs* angeht, so kann man diese Ausdrücke vermittelst einer rationalen Substitution ersten Grades transformiren, die einen Kreis, welcher neben dem Punkte $w = 0$ nur einen der Punkte $w = \alpha_k$ enthält, conform auf den Kreis in der ξ-Ebene so abbildet, dass $w = 0$ und $w = \alpha_k$ bezüglich $\xi = 0$ und $\xi = 1$ entsprechen. Die so transformirten Ausdrücke convergiren nach dem vorhin angegebenen Resultate meiner Abhandlung. Es bleibt dann aber noch die oben bezeichnete Schwierigkeit in Bezug auf die von Herrn *Fuchs* in No. 12 gebildeten Integrale.

Im Allgemeinen wird es, wenn die Fortsetzung der Integrale einer linearen Differentialgleichung ausgedrückt werden soll, darauf ankommen, die Constanten in linearen Relationen in möglichst einfacher Form darzustellen.

Ich bemerke noch in Bezug auf die in dem Referate enthaltene Aeusserung über No. 7 meiner Abhandlung, dass der Leser die Unrichtigkeit dieser Aeusserung schon nach der Lektüre der ersten vier Seiten dieser Nummer erkennen kann.

Nieder-Dollendorf bei Bonn im August 1881.

Eine geometrische Darstellung der *Landen*schen Substitution.

(Von Herrn *K. H. Schellbach.*)

Aus dem bei A rechtwinkligen sphärischen Dreiecke ABC und der beigefügten Bezeichnung entnimmt man die Formeln

$\sin c = \sin\gamma \sin a,$ also $\cos c = \sqrt{1-\sin\gamma^2 \sin a^2}$

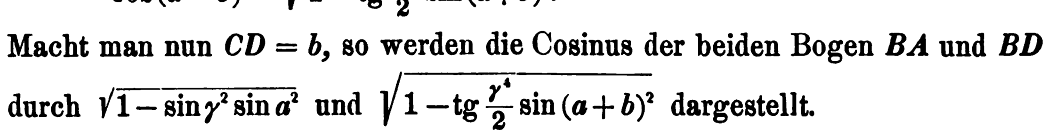
und

$\operatorname{tg} b = \cos\gamma \operatorname{tg} a,$ sowie $\sin(a-b) = \operatorname{tg}\frac{\gamma^2}{2}\sin(a+b),$

also

$$\cos(a-b) = \sqrt{1-\operatorname{tg}\frac{\gamma^4}{2}\sin(a+b)^2}.$$

Macht man nun $CD = b,$ so werden die Cosinus der beiden Bogen BA und BD durch $\sqrt{1-\sin\gamma^2\sin a^2}$ und $\sqrt{1-\operatorname{tg}\frac{\gamma^4}{2}\sin(a+b)^2}$ dargestellt.



Durch diese Bemerkung gelangt man zu der Vorstellung, dass das rechtwinklige sphärische Dreieck mit der *Landen*schen Substitution in Verbindung stehen muss. Bezeichnet man $a+b$ mit a' und $\sin\gamma$ mit $k,$ so ist auch in der That die angeführte Formel $\operatorname{tg} b = \cos\gamma \operatorname{tg} a$ nichts anderes als die *Landen*sche Substitution $\operatorname{tg}(a'-a) = k' \operatorname{tg} a.$ Der Kürze wegen mögen $\sqrt{1-\sin\gamma^2\sin a^2}$ mit $\varDelta a$ und $\sqrt{1-\operatorname{tg}\frac{\gamma^2}{2}\sin a'^2}$ mit $\varDelta' a'$ bezeichnet werden.

Wird die Seite AB bis zum Pole P des Kreises AC verlängert und der Quadrant PA um den unendlich kleinen Winkel P bis $PB'A'$ verschoben, so sind die Kreisbogen AA' mit db und BB' mit da zu bezeichnen, und das Dreieck PBB' ergiebt die Formel

$$\sin\beta\, da = \cos c\, db.$$

Aber $da + db = da'$, also

$$\sin\beta\, da = \cos c\, da' - \cos c\, da.$$

Da nun

$$\sin\beta = \frac{\cos\gamma}{\cos c} = \frac{\cos\gamma}{\Delta a} \quad \text{und} \quad \cos c = \cos(a-b)\cos\frac{\gamma^2}{2} + \cos(a+b)\sin\frac{\gamma^2}{2}$$

$$= \Delta' a' \cos\frac{\gamma^2}{2} + \cos a' \sin\frac{\gamma^2}{2},$$

so ist

$$\cos\gamma\frac{da}{\Delta a} = da'\,\Delta' a' \cos\frac{\gamma^2}{2} + da' \cos a' \sin\frac{\gamma^2}{2} - da\,\Delta a.$$

Durch Integration dieser Gleichung gelangt man zu der bekannten Formel

$$\cos\gamma\int\frac{da}{\Delta a} = \cos\frac{\gamma^2}{2}\int da'\,\Delta' a' + \sin a' \sin\frac{\gamma^2}{2} - \int da\,\Delta a,$$

welche ein elliptisches Integral erster Gattung durch zwei elliptische Integrale zweiter Gattung berechnen lehrt.

Man beachte nun noch weiter, dass

$$\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a} \quad \text{und} \quad \cos c = \frac{\cos a}{\cos b},$$

also

$$\frac{db}{da} = \frac{\sin\beta}{\cos c} = \frac{\sin 2b}{\sin 2a}, \quad \text{folglich} \quad 1 + \frac{db}{da} = \frac{da'}{da} = \frac{\sin(a+b)\cos(a-b)}{\cos a \sin a}.$$

Ferner liefert die Addition der beiden Gleichungen

$$\frac{1}{\cos c} = \frac{\cos b}{\cos a} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\gamma}{\cos c} = \frac{\sin b}{\sin a} \quad \text{die Formel} \quad \frac{2\cos\frac{\gamma^2}{2}}{\cos c} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \sin a}.$$

Daher wird

$$\frac{da'}{da} = \frac{2\cos\frac{\gamma^2}{2}}{\cos c}\cos(a-b) \quad \text{oder} \quad \frac{da}{\Delta a} = \frac{1}{2\cos\frac{\gamma^2}{2}}\,\frac{da'}{\Delta' a'}.$$

Das Integral dieser Gleichungen ist

$$\int\frac{da}{\sqrt{1-\sin\gamma^2\sin a^2}} = \frac{1}{2\cos\frac{\gamma^2}{2}}\int\frac{d(a+b)}{\sqrt{1-\operatorname{tg}\frac{\gamma^4}{2}\sin(a+b)^2}}.$$

In dieser Gleichung bedeutet also γ den spitzen Winkel eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, der zwischen der Hypotenuse a und der Kathete b liegt. Es lassen sich daher zwei wichtige Sätze aus der Theorie der elliptischen Functionen auf eine sehr einfache und für das Gedächtniss fassliche Weise aus den Eigenschaften eines sphärischen Dreiecks ableiten.

Berlin, Juni 1881.

Beweis eines Satzes über projective Punktreihen.

(Von Herrn *Pasch* in Giessen.)

In seiner Abhandlung „Untersuchung zusammenfallender reciproker Gebilde in der Ebene und im Raume" (dieses Journal Bd. 77 S. 105 ff.) giebt Herr *Schröter* auf S. 120 einen Satz an, welcher sich auf projective Punktreihen in vereinigter Lage bezieht. Eine Erweiterung dieses Satzes soll in den nachstehenden Zeilen hergeleitet werden.

Ist auf einer Geraden f durch zwei projective, aber nicht involutorische Punktreihen P und P' eine projective Beziehung gegeben, und entspricht dem Punkte b der Geraden f, der kein Doppelpunkt sein soll, bei der Beziehung PP' der Punkt c, bei der Beziehung $P'P$ der Punkt a, so sind die Punkte a und c nicht bloss von b, sondern auch von einander verschieden. Wenn also noch cd homologe Punkte bei der Beziehung PP' vorstellen, so ist durch die Punkte $abcd$, nämlich durch die drei Paare ab, bc, cd die projective Beziehung bestimmt.

Dem in der Geraden f variirenden Punkte y entspreche z bei der Beziehung PP', dagegen x bei der Beziehung $P'P$. Zieht man durch b noch eine Gerade g, nimmt in der Ebene fg den Punkt O ausserhalb der beiden Geraden und projicirt $cdyz$ aus O auf g nach $\beta\gamma\xi\eta$, so sind $abxy$ und $bcyz$ projectiv, $bcyz$ und $b\beta\xi\eta$ perspectiv, folglich $abxy$ und $b\beta\xi\eta$ projectiv, ebenso die Strahlenbüschel $\eta(abxy)$ und $y(b\beta\xi\eta)$, diese mithin sogar perspectiv. Begegnen sich also die Geraden $x\eta$ und ξy im Punkte Q, so liegen $a\beta Q$ in gerader Linie, Q in der festen Geraden $a\beta$.

Dem (von a, b, c verschiedenen) Punkte m der Geraden f seien die Punkte l und n in den Beziehungen $P'P$ und PP' zugeordnet. Projicirt man m und n aus O auf g nach resp. λ und μ, so sind $ablx$ und $bcmy$,

bcmy und ***cdnz*** projectiv, ***cdnz*** und $\beta\gamma\mu\eta$ perspectiv, folglich ***ablx*** und $\beta\gamma\mu\eta$ projectiv. Indem wir den Durchschnittspunkt ***R*** der Geraden $x\eta$ und $l\mu$ einführen, erkennen wir die Strahlenbüschel $\mu(ablx)$ und $R(\beta\gamma\mu\eta)$ nicht bloss als projectiv, sondern auch als perspectiv, da die Geraden μl und $R\mu$ zusammenfallen. Demnach liegt der Durchschnittspunkt der Strahlen μa und $R\beta$ in gerader Linie mit γ und x; die Strahlen μa und $R\beta$ schneiden sich auf der Geraden γx. Weiter sind die Büschel $a(b\beta\gamma\mu)$ und $\beta(xQ\eta R)$ perspectiv; denn die Strahlen ***ab*** und βx begegnen sich in x, $a\gamma$ und $\beta\eta$ in γ, $a\mu$ und βR auf γx, $a\beta$ und βQ fallen zusammen. Da mithin die Punktreihen $b\beta\gamma\mu$ und $xQ\eta R$, $b\beta\gamma\mu$ und ***bcdn***, ***bcdn*** und ***abcm*** projectiv sind, so ergiebt sich schliesslich die Projectivität der Punktreihen $xQ\eta R$ und ***abcm***.

Aus ***O*** projicire ich ***R*** auf ***f*** nach ***r***. Dann sind ***xyzr*** und $xQ\eta R$ perspectiv, folglich ***xyzr*** und ***abcm*** projectiv. Da man durch passende Wahl des Punktes ***m*** das Gebilde ***abcm*** einem beliebig gegebenen, aus vier verschiedenen Elementen bestehenden einförmigen Gebilde projectiv machen kann, so ist in der Geraden ***f*** jedem Punkte ***y*** ein Punkt ***r*** durch die Forderung zugeordnet, dass ***xyzr*** einem festen Gebilde projectiv sein soll. Da die Strahlen γx und βR, während ***y*** variirt, perspective Büschel resp. um γ und β mit dem perspectiven Durchschnitt $a\mu$, mithin gleichzeitig die Punkte ***x*** und ***R*** projective Punktreihen resp. in den Geraden ***f*** und $l\mu$ beschreiben, so ist auch die Beziehung zwischen ***y*** und ***r*** in der Geraden ***f*** Projectivität. Wenn endlich die Punkte ***z'*** und ***s*** bei der Beziehung ***PP'*** resp. den Punkten ***z*** und ***r*** entsprechen, also das Paar ***zs*** dem Paare ***yr***, so sind ***xyzr*** und ***yzz's*** projectiv, d. h. ***yzz's*** dem festen Gebilde projectiv, ***z*** und ***s*** zugeordnete Punkte der zwischen ***y*** und ***r*** bestehenden Projectivität. Die Paare dieser Beziehung werden durch die Projectivität ***PP'*** in Paare derselben Beziehung übertragen, und wir können daher sagen, die Beziehung ***yr*** sei bei der Projectivität ***PP'*** sich selbst homolog.

Werden auf einer Geraden, in welcher durch zwei projective, aber nicht involutorische Punktreihen P und P' eine projective Beziehung gegeben ist, dem Punkte y durch die Beziehungen P'P und PP' resp. die Punkte x und z zugeordnet und ein weiterer Punkt r so construirt, dass die gerade Punktreihe xzyr einem festen Gebilde projectiv ausfällt, so ist auch die zwischen y und r entstehende Beziehung Projectivität und bei der Projectivität PP' sich selbst homolog.

Durch die Beziehung $P'P$ werde dem Punkte r der Punkt q zugeordnet. Dann sind $yrxq$ und $zsyr$ projectiv, mithin auch $yrxq$ und $rysz$, folglich die Paare qz, ry, sx in Involution, $xzyr$ und $sqry$ projectiv. — Nimmt man also $xzyr$ harmonisch, so erhält man den *Schröter*schen Satz; denn dann werden auch $sqry$ oder $qsry$ harmonisch, $xzyr$ und $qsry$ projectiv, also y durch r in derselben Weise bestimmt, wie r durch y, d. h. die Paare ry bilden eine Involution, welche durch die Beziehung PP' in sich selbst übertragen wird.

Giessen, April 1881.

Indem wir hiermit das erste unter unserer Redaction erscheinende Heft des Journals für die reine und angewandte Mathematik dem Publikum übergeben, berufen wir uns auf die im Juli v. J. dem 89. Bande beigegebene Erklärung und bitten die Beiträge für das Journal unter der Adresse „An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik" an die Verlagsbuchhandlung von G. Reimer (Berlin, SW. Anhaltische Strasse 12) einsenden zu wollen.

Berlin, im April 1881.

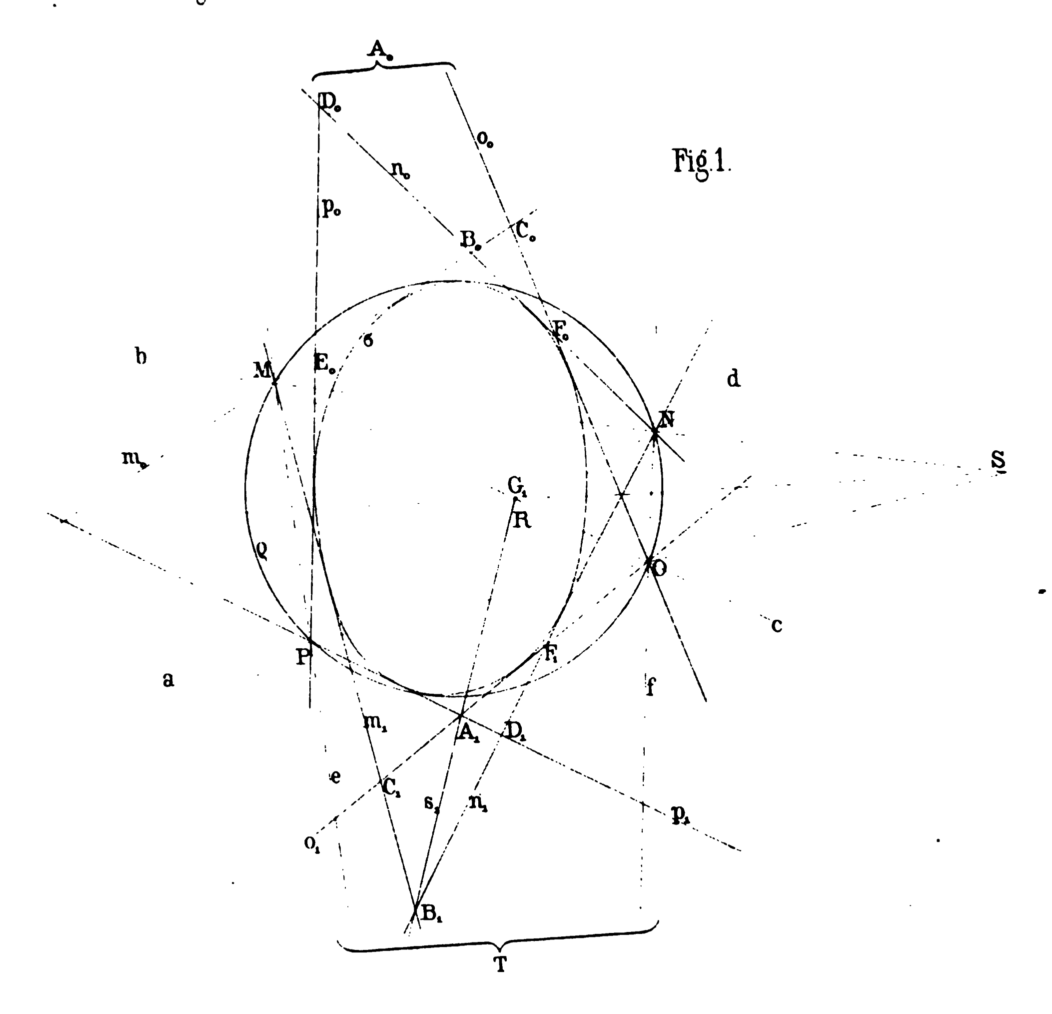
L. Kronecker, K. Weierstrass.

Indem wir hiermit den ersten unter unserer Redaction erscheinenden Band des Journals für die reine und angewandte Mathematik dem Publikum übergeben, berufen wir uns auf die im Juli v. J. dem 89. Bande beigegebene Erklärung. Wir freuen uns dabei mittheilen zu können, dass Herr Professor *Lampe,* welcher schon seit dem Jahre 1868 unter *Borchardts* Leitung die speciellen Redactions-Geschäfte geführt hat, uns seine fernere Mitwirkung zugesichert hat. Die Beiträge für das Journal bitten wir ausschliesslich unter der Adresse „An die Redaction des Journals für die reine und angewandte Mathematik" an die Verlagsbuchhandlung von *G. Reimer* (Berlin, S.W. Anhaltische Strasse 12) einsenden zu wollen.

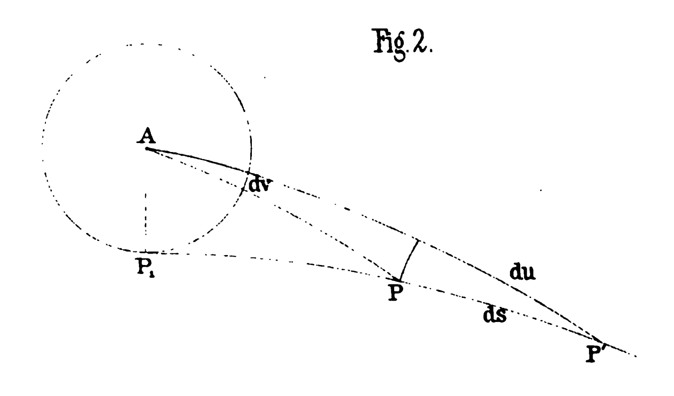
Berlin, im September 1881.

L. Kronecker, K. Weierstrass.

Stahl: Strahlensystem 3ter Ordnung u. 2ter Classe.



v. Mangoldt: geodät. Linien auf positiv gekrümmten Flächen.



STORAGE AREA

